



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ Μ.Κ. & Α.Ε.

Εργαστήριο Αυτομάτου Ελέγχου

Διπλωματική Εργασία

**«ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΥ
ΣΕΡΒΟΜΗΧΑΝΙΣΜΟΥ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗ ΤΡΙΒΗΣ»**

Γεώργιος Χάσπαρης

Επιβλέπων Καθηγητής: Ε. Γ. Παπαδόπουλος

ΑΘΗΝΑ 2001

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί μία μικρή συμβολή στην γενικότερη προσπάθεια των μηχανικών ελέγχου για την όσο το δυνατόν πληρέστερη κατανόηση και αποτελεσματικότερη αντιμετώπιση των επιπτώσεων της τριβής σε συστήματα σερβομηχανισμών. Κύριο αντικείμενό της είναι η μελέτη των φαινομένων που χαρακτηρίζουν την τριβή, η μοντελοποίηση και η ανάλυση συστημάτων με τριβή, καθώς και η εφαρμογή σχεδίων αντιστάθμισης αυτής σε σύστημα σερβομηχανισμού.

Η αντιστάθμιση τριβής βασίστηκε σε διάφορους τρόπους μοντελοποίησής της (μοντέλα τριβής). Μάλιστα, η υψηλή ακρίβεια μοντελοποίησης εξασφαλίζει την υψηλή ακρίβεια στον έλεγχο της κίνησης. Επιπλέον, η ανάλυση συστημάτων με τριβή, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της Περιγραφικής Συνάρτησης, έδειξε ότι ένας ακόμη λόγος επιδίωξης ακριβούς μοντελοποίησης της τριβής είναι η αποφυγή φαινομένων αστάθειας. Γι' αυτό, τόσο η φυσική της τριβής όσο και η μετέπειτα μοντελοποίησή της μελετήθηκαν διεξοδικά.

Χρησιμοποιώντας διάφορα μοντέλα τριβής επιδιώχθηκε η σύγκρισή τους και ο εντοπισμός των μειονεκτημάτων και πλεονεκτημάτων τους. Η σύγκριση επικεντρώθηκε στην μείωση που επιτυγχάνουν τόσο στο σφάλμα τελικής θέσης, όσο και στο σφάλμα παρακολούθησης τροχιάς. Τα αποτελέσματα της εφαρμογής αντιστάθμισης τριβής με μοντέλα προέρχονται τόσο από προσομοιώσεις, όσο και από πειράματα.

Τα πειράματα πραγματοποιήθηκαν σε ένα σύστημα κοχλία-οδηγού με την βοήθεια του οποίου εξασφαλίζεται η γραμμική κίνηση μιας μάζας κεντρικά στερεωμένης σ' αυτόν. Σ' αυτό το σύστημα η τριβή είναι μη αμελητέα και η χρησιμοποίηση αντιστάθμισης τριβής επέφερε ενθαρρυντικά αποτελέσματα όσον αφορά τον έλεγχο της κίνησης του σώματος με υψηλή ακρίβεια.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω την ειλικρινή μου εκτίμηση στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ε. Παπαδόπουλο για την καθοδήγηση και ενθάρρυνση του κατά την διάρκεια της διπλωματικής μου εργασίας. Ο αμείωτος ενθουσιασμός του για τα προβλήματα σχεδιασμού και ελέγχου έδιναν όλο και μεγαλύτερο ενδιαφέρον στην εργασία μου.

Επίσης, είμαι ευγνώμων σε όλους τους συναδέλφους μου στο Εργαστήριο Αυτομάτου Ελέγχου για την βοήθειά τους και τις πολύ χρήσιμες συμβουλές τους.

Πρόλογος

Η ύπαρξη σχετικής κίνησης σε οποιοδήποτε μηχανικό σύστημα, για παράδειγμα ρουλεμάν, μεταδόσεις, υδραυλικά και πνευματικά έμβολα, βαλβίδες, φρένα και τροχούς, συνεπάγεται την ύπαρξη της δύναμης της τριβής. Συγκεκριμένα, η τριβή αναπτύσσεται στην επιφάνεια επαφής μεταξύ των σχετικώς κινούμενων σωμάτων και είναι υπεύθυνη για πολλά προβλήματα που σχετίζονται με τον έλεγχο και την ακρίβεια των μηχανικών συστημάτων. Μπορεί, για παράδειγμα, να αναγκάσει το κινούμενο σώμα να τρέμει κατά την διάρκεια της κίνησης, μπορεί να προκαλέσει μεγάλα σφάλματα κατά την παρακολούθηση μιας τροχιάς όταν η κατεύθυνση αλλάζει, και είναι επίσης γνωστό ότι προκαλεί παραμένουσες ταλαντώσεις κατά την προσέγγιση της τελικής θέσης.

Με άλλα λόγια δεν θα ήταν άστοχο αν χαρακτηρίζαμε την τριβή ως την νέμεση του ελέγχου υψηλής ακρίβειας. Ειδικότερα, αψηφά την ανάλυση και καταπατά την εφαρμογή των καλύτερων σύγχρονων μεθόδων σχεδιασμού. Μάλιστα, επειδή δεν μπορεί να υπακούσει εύκολα σε μαθηματική μεταχείριση συχνά θεωρείται σαν ένα φαινόμενο ανάξιο του συνυπολογισμού του στην θεωρία του ελέγχου. Παρ' όλα αυτά είναι σημαντικό για τους μηχανικούς ελέγχου να γνωρίζουν πως να τα μεταχειριστούν. Εξάλλου είναι οικονομικά ασύμφορη η μείωση της δύναμης της τριβής μέσω των διάφορων μεθόδων επεξεργασίας της επιφάνειας.

Η κατανόηση, επομένως, της τριβής και η μοντελοποίηση της είναι το όπλο του μηχανικού ελέγχου στην εύρεση απλών και αποτελεσματικών λύσεων για τη αντιμετώπιση των προβλημάτων που δημιουργεί η τριβή σε ένα μηχανικό σύστημα. Βέβαια, η κατανόηση της τριβής από την μεριά του δεν συνεπάγεται αναγκαστικά τη μελέτη και χρησιμοποίηση όλων των ερευνητικών κατακτήσεων της επιστήμης της τριβολογίας, που έχει, πράγματι, να επιδείξει σημαντική πρόοδο στον αιώνα μας. Εξάλλου, η πολυπλοκότητα δεν αποτελεί πάντα την ιδανικότερη λύση, ειδικά σε ένα μηχανικό πρόβλημα, όπου η οικονομία, π.χ. υπολογιστική, καθίσταται πρώτη προτεραιότητα.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	2
Ευχαριστίες.....	3
Πρόλογος	4
Περιεχόμενα.....	5
Πίνακας Σχημάτων	9
Πίνακας Πινάκων.....	12
Πίνακας Συντμήσεων	13
Πίνακας Συμβόλων.....	15
1 Εισαγωγή	22
1.1 Σκοπός εργασίας.....	22
1.2 Συνοπτική βιβλιογραφική ανασκόπηση	22
1.3 Δομή Εργασίας.....	25
2 Φυσική της τριβής.....	27
2.1 Η περιοχή της στατικής τριβής και της προ-ολίσθησης μετατόπισης	27
2.1.1 Ποσοτικά χαρακτηριστικά της στατικής τριβής	28
2.1.1.1 Η μεταβολή της στατικής τριβής με τον χρόνο και την θέση....	29
2.1.1.2 Η μεταβολή της δυναμικής της στατικής τριβής με τον χρόνο και την θέση.....	29
2.1.2 Ποιοτικά χαρακτηριστικά της στατικής τριβής	29
2.1.2.1 Μικρές μετατοπίσεις.....	30
2.1.2.2 Μεγάλες μετατοπίσεις	30
2.1.2.2.1 Πλαστική παραμόρφωση	30
2.1.2.2.2 Παραμόρφωση μη γραμμικού ελατηρίου	30
2.2 Η περιοχή της τριβής ολίσθησης.....	33
2.2.1 Η περιοχή της οριακής λίπανσης (boundary lubrication)	35
2.2.2 Η περιοχή της μερικώς υγρής λίπανσης (partial fluid lubrication)...	35
2.2.3 Η περιοχή της πλήρως υγρής λίπανσης (full fluid lubrication)	37
2.3. Η περιοχή κίνησης με μεταβαλλόμενη ταχύτητα.....	37
2.3.1 Το φαινόμενο Stribeck.....	38
2.3.2 Η εξάρτηση του επιπέδου της τριβής αποδέσμευσης από τον ρυθμό εφαρμογής της εξωτερικής δύναμης	39

2.3.3 Η εξάρτηση του επιπέδου της τριβής αποδέσμευσης από τον χρόνο που ξοδεύεται στην στατική περιοχή (rising static friction – R.S.F.).....	39
2.3.4 Τριβώδης μνήμη ή τριβώδης καθυστέρηση (frictional memory or frictional lag)	40
3 Μοντέλα τριβής.....	42
3.1 Κινητικά μοντέλα τριβής (K.F.M.)	42
3.1.1 Το κλασσικό μοντέλο τριβής.....	42
3.1.2 Το γενικό κινητικό μοντέλο τριβής	45
3.1.3 Το μοντέλο Karnopp	46
3.2 Μοντέλα τριβής με χρονική εξάρτηση (T.D.F.M.).....	48
3.2.1 Το μοντέλο των Hess-Soom (H.S.M.)	48
3.2.2 Το μοντέλο των επτά παραμέτρων (S.P.M.)	49
3.3 Μοντέλα τριβής μεταβλητών κατάστασης (S.V.F.M.)	51
3.3.1 Το μοντέλο του Dahl (D.M.).....	52
3.3.2 Το μοντέλο των Bliman-Sorine (B.S.M.).....	54
3.3.3 Τροποποιημένο μοντέλο του Dahl (M.D.M.)	56
3.3.4 Το μοντέλο του Canudas (C.M.).....	56
3.3.5 Το “bristle model” (B.M.).....	58
3.3.6 Το “reset integrator model” (R.I.M.).....	60
3.3.7 Το μοντέλο Lund-Grenoble (L.G.M.)	62
4 Ανάλυση μη γραμμικών συστημάτων ελέγχου	66
4.1 Εισαγωγή	66
4.1.1 Ανάλυση με περιγραφική συνάρτηση (D.F.A.)	66
4.1.2 Αλγεβρική ανάλυση (A.A.)	67
4.1.3 Phase Plane Analysis (P.P.A.)	67
4.1.4 Ανάλυση με προσομοίωση (simulation)	68
4.2 Ανάλυση με περιγραφική συνάρτηση (D.F.A.).....	68
4.2.1 Ορισμός της περιγραφικής συνάρτησης (D.F.)	68
4.2.2 Η D.F.A. σε μη γραμμικά συστήματα ελέγχου.....	70
4.2.3 Κριτήριο Ευστάθειας του Μη Γραμμικού Συστήματος.....	71
4.2.4 Ευστάθεια L.C.....	71
5 Η D.F.A. σε μη γραμμικά συστήματα με τριβή	74
5.1 Η τεχνική της “memoryless element describing function” (M.E.D.F.)	75
5.2 Η M.E.D.F. σε συστήματα 2 ^{ης} και άνω τάξης με τριβή.....	77
5.2.1 Εισαγωγή.....	77
5.2.2 Συστήματα 2 ^{ης} τάξης με PD έλεγχο	79
5.2.2.1 Μοντελοποίηση	79
5.2.2.2 Προσθήκη PD κατευθυντή	85

5.2.2.3 Εφαρμογή της M.E.D.F.	86
5.2.2.4 Ακρίβεια προσδιορισμού των χαρακτηριστικών του L.C.	90
5.2.2.5 Σχέση μεταξύ της διαφοράς ΔG και της απόσβεσης ζ του γραμμικού τμήματος ενός συστήματος 2 ^{ης} τάξης.....	97
5.2.2.6 Οδήγηση του συστήματος σε περιοχή προσδιορισμού των χαρακτηριστικών του L.C. με εξαιρετική ακρίβεια	99
5.2.3 Συστήματα 2 ^{ης} τάξης με PID κατευθυντή.....	100
5.2.3.1 Μοντελοποίηση	100
5.2.3.2 Εφαρμογή της M.E.D.F.	101
5.2.3.3 Ακρίβεια προσδιορισμού των χαρακτηριστικών του L.C.	106
5.2.4 Συστήματα 4 ^{ης} τάξης με PD έλεγχο	109
5.2.4.1 Μοντελοποίηση	109
5.2.4.2 Εφαρμογή της M.E.D.F.	113
5.2.5 Η επίδραση της στατικής τριβής στην M.E.D.F.	118
5.2.5.1 Η επίδραση της ροπής αποδέσμευσης	119
5.2.5.2 Η επίδραση της προσκόλλησης.....	122
6 Αντιστάθμιση τριβής σε πειραματική διάταξη	125
6.1 Πειραματική διάταξη.....	125
6.1.1 Στοιχεία πειραματικής διάταξης.....	125
6.1.2 Λειτουργία πειραματικής διάταξης.....	127
6.1.3 Ο έλεγχος σε πραγματικό χρόνο	129
6.2 Μοντελοποίηση πειραματικής διάταξης	130
6.2.1 Η δύναμη τριβής ως διαταραχή.....	130
6.2.2 Η δύναμη τριβής ως συνάρτηση της ταχύτητας	133
6.2.3 Πειραματικός προσδιορισμός της τριβής.....	134
6.3 Αντιστάθμιση τριβής.....	137
6.3.1 Επιλογή του μοντέλου τριβής.....	137
6.3.2 Υπερεκτίμηση της τριβής και εντοπισμός L.C.	141
6.3.2.1 PD κατευθυντής	142
6.3.2.2 PID κατευθυντής	146
6.3.3 Εφαρμογή νόμων ελέγχου με αντιστάθμιση.....	149
6.3.3.1 Μείωση σφάλματος μόνιμης κατάστασης.....	150
6.3.3.2 Μείωση σφάλματος παρακολούθησης τροχιάς	155
7 Συμπεράσματα και Μελλοντική Εργασία	158
7.1 Συμπεράσματα.....	158
7.2 Μελλοντική Εργασία.....	158
Βιβλιογραφία	160
Παράρτημα Α	165
Σχεδιασμός τροχιάς παρακολούθησης	165
Παράρτημα Β	166

Καθορισμός κερδών PD κατευθυντή.....	166
B.1 Αντιστάθμιση τριβής και έλεγχος με πηγή ρεύματος.....	166
B.2 "Model based" έλεγχος με αντιστάθμιση τριβής και έλεγχο με πηγή ρεύματος.....	167
Παράρτημα Γ.....	169
Πρόγραμμα PID κατευθυντή με αντιστάθμιση τριβής (κλασσικό μοντέλο) σε περιβάλλον πραγματικού χρόνου (QNX).....	169

Πίνακας Σχημάτων

Σχήμα 2-1. Το φαινόμενο μνήμης της στατικής τριβής.....	31
Σχήμα 2-2. Επιβεβαίωση του φαινομένου Bauchinger.	32
Σχήμα 2-3. Η γενικευμένη καμπύλη Stribeck, δείχνοντας την τριβή σαν μια συνάρτηση της ταχύτητας για χαμηλές ταχύτητες.....	34
Σχήμα 2-4. Οριακή λίπανση.	35
Σχήμα 2-5. Μερικώς υγρή λίπανση.	36
Σχήμα 2-6. Πλήρως υγρή λίπανση.	37
Σχήμα 2-7. Χαρακτηριστική σχέση μεταξύ του ρυθμού εφαρμογής δύναμης και της δύναμης αποδέσμευσης.....	39
Σχήμα 2-8. (α) Μηχανή τριβής, (β) η τριβή του ελατηρίου κατά την κίνηση S.S. ...	39
Σχήμα 2-9. Το φαινόμενο της τριβώδους μνήμης.	41
Σχήμα 3-1. Μοντέλο τριβής: Coulomb+ιξώδης τριβή.	43
Σχήμα 3-2. Μοντέλο τριβής: στατική+Coulomb+ιξώδης τριβή.	45
Σχήμα 3-3. Γενικό κινητικό μοντέλο τριβής.....	46
Σχήμα 3-4. Το μοντέλο Karnopp ενός συστήματος 2 ^{ης} τάξης.....	47
Σχήμα 3-5. “Bristle model”, (α) N τυχαία τοποθετημένοι δεσμοί τριχιδίων, (β) ένας μοναδικός δεσμός.	58
Σχήμα 3-6. “Reset integrator friction model”.....	60
Σχήμα 3-7. “Reset integrator model” κατά την διάρκεια της (α) προσκόλλησης, και (β) ολίσθησης.....	61
Σχήμα 3-8. Η δημιουργία της τριβής μεταξύ δύο επιφανειών.	63
Σχήμα 4-1. Μη γραμμικό σύστημα ελέγχου.....	70
Σχήμα 4-2. Μη γραμμικό σύστημα ελέγχου.....	70
Σχήμα 4-3. Ανάλυση ευστάθειας L.C. ενός μη γραμμικού συστήματος.	72
Σχήμα 5-1. Σύστημα μιας μάζας με τριβή, η οποία μοντελοποιείται ως συνάρτηση της ταχύτητας.	74
Σχήμα 5-2. Το δομικό διάγραμμα ενός συστήματος μιας μάζας με τριβή μετά τον χωρισμό του γραμμικού από το μη γραμμικό κομμάτι.....	76
Σχήμα 5-3. Διάγραμμα Nyquist για τον εντοπισμό “limit cycle”.....	77
Σχήμα 5-4. Σύστημα 2 ^{ης} τάξης, μιας μάζας με ελατήριο και αποσβεστήρα.....	79
Σχήμα 5-5. Δομικό διάγραμμα του συστήματος 2 ^{ης} τάξης με πηγή τάσης.	81
Σχήμα 5-6. Δομικό διάγραμμα του γενικού συστήματος 2 ^{ης} τάξης με πηγή τάσης και με αντιστάθμιση τριβής.	82
Σχήμα 5-7. Τροποποιημένο δομικό διάγραμμα του γενικού συστήματος 2 ^{ης} τάξης με πηγή τάσης και με αντιστάθμιση τριβής.	83
Σχήμα 5-8. Δομικό διάγραμμα του συστήματος 2 ^{ης} τάξης με πηγή ρεύματος.....	84
Σχήμα 5-9. Τροποποιημένο δομικό διάγραμμα του γενικού συστήματος 2 ^{ης} τάξης με πηγή ρεύματος και με αντιστάθμιση τριβής.....	85
Σχήμα 5-10. Δομικό διάγραμμα του συστήματος 2 ^{ης} τάξης μετά την προσθήκη του PD κατευθυντή.	85
Σχήμα 5-11. Τυπική απόκριση του συστήματος του Σχ. 5-2 με L.C.	92
Σχήμα 5-12. Φάσμα ισχύος του σήματος εξόδου από το σύστημα του Σχ. 5-2....	93
Σχήμα 5-13. Διάγραμμα Bode του γραμμικού τμήματος του συστήματος του Σχ. 5-2.	94

Σχήμα 5-14. Γραφική παράσταση του σφάλματος στην προσέγγιση της τιμής του πλάτους και της συχνότητας του L.C για την περίπτωση ενός συστήματος 2 ^{ης} τάξης με PD κατευθυντή.	96
Σχήμα 5-15. Δομικό διάγραμμα του συστήματος 2 ^{ης} μετά την προσθήκη του PID κατευθυντή.	100
Σχήμα 5-16. Γραφική παράσταση του σφάλματος στην προσέγγιση της τιμής του πλάτους και της συχνότητας του L.C για την περίπτωση ενός συστήματος 2 ^{ης} τάξης με PID κατευθυντή.	108
Σχήμα 5-17. Σύστημα 4ης τάξης, δύο μαζών συνδεδεμένων με ελατήριο και αποσβεστήρα.	109
Σχήμα 5-18. Γραφική παράσταση του σφάλματος στην προσέγγιση της τιμής του πλάτους και της συχνότητας του L.C για την περίπτωση ενός συστήματος 4 ^{ης} τάξης με PD κατευθυντή.	117
Σχήμα 5-19. Γραφική παράσταση της συνάρτησης E(t).	121
Σχήμα 6-1. Κοχλίας-οδηγός.	125
Σχήμα 6-2. Κατευθυντής.	125
Σχήμα 6-3. Ηλεκτρονικός υπολογιστής (PC PENTIUM III 500MHz).	126
Σχήμα 6-4. Ενισχυτής εύρους παλμού (PWM amplifier).	126
Σχήμα 6-5. Κινητήρας συνεχούς ρεύματος, 48 Volts, 70 Watt της MAXON MOTORS.	126
Σχήμα 6-6. Παλμογεννήτρια τύπου incremental της HEWLETT PACKARD.	127
Σχήμα 6-7. Δομή πειραματικής διάταξης.	127
Σχήμα 6-8. Οι δυνάμεις τριβής στο σύστημα δρομέα-κοχλία.	130
Σχήμα 6-9. Το διάγραμμα δεσμών της πειραματικής διάταξης.	131
Σχήμα 6-10. Το δομικό διάγραμμα της πειραματικής διάταξης.	133
Σχήμα 6-11. Το δομικό διάγραμμα της πειραματικής διάταξης, όταν η τριβή είναι συνάρτηση της ταχύτητας.	133
Σχήμα 6-12. Πειραματικές τιμές των χαρακτηριστικών μεγεθών της τριβής σε συνάρτηση με την θέση της μάζας στον κοχλία-οδηγό.	136
Σχήμα 6-13. Δομικό διάγραμμα πειραματικής διάταξης με PD κατευθυντή.	137
Σχήμα 6-14. Σύγκριση της απόκρισης θέσης του πραγματικού συστήματος με τις αποκρίσεις θέσης του μοντέλου του συστήματος για τρία διαφορετικά μοντέλα τριβής.	139
Σχήμα 6-15. Δομικό διάγραμμα πειραματικής διάταξης με PD κατευθυντή και αντιστάθμιση τριβής.	140
Σχήμα 6-16. Σύγκριση της απόκρισης θέσης του πραγματικού συστήματος με τις αποκρίσεις θέσης του μοντέλου του συστήματος για τρία διαφορετικά μοντέλα τριβής, όταν εμφανίζεται L.C.	141
Σχήμα 6-17. Αποκρίσεις σφάλματος και ταχύτητας σε διάφορες περιπτώσεις υπερεκτίμησης των παραμέτρων της τριβής όταν χρησιμοποιείται PD κατευθυντής.	144
Σχήμα 6-18. Γραφική παράσταση του σφάλματος στην προσέγγιση της τιμής του πλάτους και της συχνότητας του L.C όταν χρησιμοποιείται PD κατευθυντής.	145
Σχήμα 6-19. Αποκρίσεις σφάλματος και ταχύτητας σε διάφορες περιπτώσεις υπερεκτίμησης των παραμέτρων της τριβής όταν χρησιμοποιείται PID κατευθυντής.	147
Σχήμα 6-20. Γραφική παράσταση του σφάλματος στην προσέγγιση της τιμής του πλάτους και της συχνότητας του L.C όταν χρησιμοποιείται PID κατευθυντής.	149

Σχήμα 6-21. Τροχιά παρακολούθησης κατά μήκος του κοχλία-οδηγού.....	150
Σχήμα 6-22. Αποκρίσεις σφάλματος και ταχύτητας για διάφορες μεθόδους ελέγχου με σκοπό την μείωση του σφάλματος μόνιμης κατάστασης.	152
Σχήμα 6-23. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του σφάλματος μόνιμης κατάστασης για τέσσερις μεθόδους ελέγχου και για τέσσερις τελικές θέσεις.....	154
Σχήμα 6-24. Αποκρίσεις θέσης για διάφορες μεθόδους ελέγχου με σκοπό την μείωση του σφάλματος παρακολούθηση τροχιάς.	157

Πίνακας Πινάκων

Πίνακας 3-1. Προσεγγιστικά εύροι τιμών για τις παραμέτρους του μοντέλου τριβής των επτά παραμέτρων.	50
Πίνακας 3-2. Δυνατότητες του μοντέλου των επτά παραμέτρων.	50
Πίνακας 5-1. Χάρτης εντοπισμού L.C. σε σύστημα 2 ^{ης} τάξης, μιας μάζας, με τριβή Coulomb+ιξώδη, με έλεγχο τάσης και PD κατευθυντή.	89
Πίνακας 5-2. Χάρτης εντοπισμού L.C. σε σύστημα 2 ^{ης} τάξης, μιας μάζας, με τριβή Coulomb+ιξώδη, με έλεγχο ρεύματος και PD κατευθυντή.	90
Πίνακας 5-3. Σύγκριση των θεωρητικών τιμών του πλάτους και της συχνότητας του L.C. με εκείνες που προέκυψαν με προσομοίωση στο Matlab/Simulink για συστήματα 2 ^{ης} τάξης με έλεγχο τάσης και PD κατευθυντή.	94
Πίνακας 5-4. Χάρτης εντοπισμού L.C. σε σύστημα 2 ^{ης} τάξης, μιας μάζας, με τριβή Coulomb+ιξώδη, με έλεγχο τάσης και PID κατευθυντή.	105
Πίνακας 5-5. Χάρτης εντοπισμού L.C. σε σύστημα 2 ^{ης} τάξης, μιας μάζας, με τριβή Coulomb+ιξώδη, με έλεγχο ρεύματος και PID κατευθυντή.	106
Πίνακας 5-6. Σύγκριση των θεωρητικών τιμών του πλάτους και της συχνότητας του L.C. με εκείνες που προέκυψαν με προσομοίωση στο Matlab/Simulink για συστήματα 2 ^{ης} τάξης με έλεγχο τάσης και PID κατευθυντή.	107
Πίνακας 5-7. Σύγκριση των θεωρητικών τιμών του πλάτους και της συχνότητας του L.C. με εκείνες που προέκυψαν με προσομοίωση στο Matlab/Simulink για συστήματα 4 ^{ης} τάξης με PD κατευθυντή. ...	114
Πίνακας 6-1. Οι εξισώσεις στοιχείων και κόμβων της πειραματικής διάταξης.	131
Πίνακας 6-2. Περιπτώσεις υπερεκτίμησης των παραμέτρων της τριβής που οδηγούν σε εντοπισμό L.C. όταν χρησιμοποιείται PD κατευθυντής.	143
Πίνακας 6-3. Πειραματικές τιμές του πλάτους και της συχνότητας του L.C. για διάφορες περιπτώσεις υπερεκτίμησης των παραμέτρων της τριβής όταν χρησιμοποιείται PD κατευθυντής.	144
Πίνακας 6-4. Περιπτώσεις υπερεκτίμησης των παραμέτρων της τριβής που οδηγούν σε εντοπισμό L.C. όταν χρησιμοποιείται PID κατευθυντής.	146
Πίνακας 6-5. Πειραματικές τιμές του πλάτους και της συχνότητας του L.C. για διάφορες περιπτώσεις υπερεκτίμησης των παραμέτρων της τριβής όταν χρησιμοποιείται PID κατευθυντής.	148
Πίνακας 6-6. Σφάλμα μόνιμης κατάστασης για τέσσερις τρόπους ελέγχου και για τέσσερις τελικές θέσεις.	153
Πίνακας 6-7. Μέση τιμή και τυπική απόκλιση του σφάλματος μόνιμης κατάστασης για τέσσερις μεθόδους ελέγχου και για τέσσερις τελικές θέσεις.	153
Πίνακας 6-8. Ποσοστό μείωσης του σφάλματος μόνιμης κατάστασης για τις μεθόδους ελέγχου PDCV, PDBV, PDGK σε σύγκριση με την μέθοδο PD και για τέσσερις τελικές θέσεις.	155

Πίνακας Συντμήσεων

A.A.	Algebraic Analysis
B.M.	Bristle Model
B.S.M.	Bliman-Sorine Models
C.M.	Canudas Model
D.F.	Describing Function
D.F.A.	Describing Function Analysis
D.M.	Dahl Model
E.H.L.	Ελαστο-υδροδυναμική λίπανση
H.S.M.	το μοντέλο τριβής των Hess-Soom
I.F.P.C.	Integrated Friction/Plant Construction
K.F.M.	Kinetic Friction Models
L.C.	Limit Cycle
L.G.M.	Lund-Grenoble Model
M.B.	"Model Based" έλεγχος
M.B.B.V.	M.B. έλεγχος+αντιστάθμιση τριβής με το μοντέλο «ροπή αποδέσμευσης+ιξώδης τριβή»
M.B.C.V.	M.B. έλεγχος+αντιστάθμιση τριβής με το μοντέλο «τριβή Coulomb+ιξώδης τριβή»
M.B.G.K.	M.B. έλεγχος+αντιστάθμιση τριβής με το γενικό κινητικό μοντέλο τριβής
M.D.M.	Modified Dahl Model
M.E.C.	Memoryless Element Construction
M.E.D.F.	Memoryless Element Describing Function
M.O.F.	Memoryless, Odd Function
M.P.W.	Maximum Possible Work Hardening
P.D.	"Proportional – Derivative" κατευθυντής
P.D.B.V.	PD έλεγχος+αντιστάθμιση τριβής με το μοντέλο «ροπή αποδέσμευσης+ιξώδης τριβή»
P.D.C.V.	PD έλεγχος+αντιστάθμιση τριβής με το μοντέλο «τριβή Coulomb+ιξώδης τριβή»
P.D.G.K.	P.D. έλεγχος+αντιστάθμιση τριβής με το γενικό κινητικό μοντέλο τριβής
P.I.D.	Proportional-Derivative-Integrated
P.P.A.	Phase Plane Analysis
R.I.M.	Reset Integrator Model
R.S.F.	το φαινόμενο τριβής "rising static friction"

S.P.M.	το μοντέλο τριβής των επτά παραμέτρων (seven parameter model)
S.S.	Κίνηση “Stick-Slip”
S.V.F.M.	State-Variable Friction Models
T.D.F.M.	Time Dependent Friction Models

Πίνακας Συμβόλων

a	χρονική καθυστέρηση του μοντέλου τριβής H.S.M.
α_p	μία σταθερά που χρησιμοποιείται στο R.I.M. για την δημιουργία των μεγαλύτερων φορτίων τριβής που εμφανίζονται στην στατική περιοχή
γ	ο χαρακτηριστικός χρόνος του φαινομένου R.S.F.
δ_v	μία παράμετρος που εξαρτάται από την γεωμετρία της εφαρμογής
δ_i	η ελαστική παραμόρφωση ενός ευλύγιστου τριχιδίου στο μοντέλο B.M.
δ_s	σημείο θλάσης ενός ευλύγιστου τριχιδίου στο μοντέλο B.M.
Δ_x	η παραμόρφωση κατά την προσκόλληση στο S.P.M.
Δb	η διαφορά της εκτίμησης της τιμής του συντελεστή ιξώδους τριβής από την πραγματική του τιμή
ΔF_c	η διαφορά της εκτίμησης της τιμής της τριβής Coulomb από την πραγματική της τιμή
ΔF_f	η διαφορά της εκτίμησης της τιμής της τριβής από την πραγματική της τιμή
ΔG	η διαφορά μεταξύ του λογαριθμικού μέτρου της συνάρτησης μεταφοράς (του γραμμικού τμήματος του συστήματος) που αντιστοιχεί στην βασική αρμονική συνιστώσα ενός L.C. και του λογαριθμικού μέτρου που αντιστοιχεί στην ακριβώς επόμενη υψηλότερη αρμονική
ΔT_c	η διαφορά της εκτίμησης της τιμής της τριβής Coulomb από την πραγματική της τιμή
ΔT_f	η διαφορά της εκτίμησης της τιμής της τριβής από την πραγματική της τιμή
ΔV	το διάστημα στο οποίο η ταχύτητα μπορεί να θεωρηθεί μηδέν στο μοντέλο Karnopp
ε	η σταθερά χρόνου στο μοντέλο M.D.M.
ζ	η απόσβεση του συστήματος 2 ^{ης} τάξης ή μια εσωτερική μεταβλητή που αντιπροσωπεύει την σχετική μετατόπιση από την έναρξη της προσκόλλησης στο μοντέλο C.M.
$\eta, f_1, f_2, \varepsilon_f$	σταθερές των μοντέλων B.S.M.
θ	η γωνιακή μετατόπιση
$\dot{\theta}$	η γωνιακή ταχύτητα
$\ddot{\theta}$	η γωνιακή επιτάχυνση

θ_i	μεταβλητή κατάστασης ενός δυναμικού μοντέλου τριβής
$\dot{\theta}_{str}$	η γωνιακή ταχύτητα Stribeck
μ	ο συντελεστής τριβής ολίσθησης
μ_e	η μέση τιμή του σφάλματος θέσης
M	η μάζα του κινούμενου σώματος
σ_0	ο συντελεστής δυσκαμψίας στο μοντέλο L.G.M.
σ_1	ο συντελεστής απόσβεσης που χαρακτηρίζει την παραμόρφωση των τριχιδίων στο μοντέλο L.G.M.
σ_e	η τυπική απόκλιση του σφάλματος θέσης
τ_L	η σταθερά χρόνου της τριβώδους μνήμης
v_{str}	η ταχύτητα Stribeck
v	η σχετική ταχύτητα μεταξύ δύο τριβόμενων επιφανειών
Φ_1	η διαφορά φάσης μεταξύ της βασικής αρμονικής συνιστώσας της εξόδου του μη γραμμικού στοιχείου και της εισόδου του
ω	η συχνότητα ή η γωνιακή ταχύτητα
$\omega_{L.C.}$	η συχνότητα του L.C. κατά την D.F.A.
$\omega_{L.S.,s}$	η συχνότητα του L.C. που προέκυψε από την προσομοίωση στο Matlab/Simulink
ω_n	η ιδιοσυχνότητα του συστήματος 2 ^{ης} τάξης
ω_{str}	η γωνιακή ταχύτητα Stribeck
$\bar{\omega}_{str}$	η μέση τιμή της πειραματικά προσδιορισμένης ταχύτητας Stribeck
b	ο συντελεστής ιξώδους τριβής
b'	ο συντελεστής ιξώδους τριβής της τριβής αντιστάθμισης
$\bar{b}$	η μέση τιμή του πειραματικά προσδιορισμένου συντελεστή ιξώδους τριβής
b_ε	ο συντελεστής ιξώδους τριβής στα έδρανα
b_κ	ο συντελεστής ιξώδους τριβής λόγω κίνησης της μάζας
$b_{ολ}$	ο συντελεστής της συνολικής ιξώδους τριβής της εγκατάστασης
$\bar{b}_{ολ}$	η μέση τιμή του συντελεστή της συνολικής ιξώδους τριβής της εγκατάστασης
b_i	αρχική θέση ενός ευλύγιστου τριχιδίου στο μοντέλο B.M.

b_p	ο συντελεστής απόσβεσης του μοντέλου R.I.M.
b_s	συντελεστής απόσβεσης της περιοχής προσκόλλησης στο μοντέλο C.M.
B	το στοιχείο απόσβεσης
c_0, c_1, c_2	θετικές σταθερές του μοντέλου τριβής H.S.M.
e	το σφάλμα θέσης
e_ω	το σχετικό σφάλμα στον προσδιορισμό της συχνότητας του L.C.
e_X	το σχετικό σφάλμα στον προσδιορισμό του πλάτους του L.C.
e_{ss}	το σφάλμα θέσης μόνιμης κατάστασης
F_c	η τριβή Coulomb
$F_{c,\kappa}$	η τριβή Coulomb στην επιφάνεια του κοχλία λόγω της κίνησης της μάζας
F_e	η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων
F_f	η δύναμη τριβής
$F_{f,ss}$	η δύναμη τριβής στην μόνιμη κατάσταση
F_g	η συνισταμένη των δυνάμεων αντιστάθμισης της βαρύτητας και του ενισχυτή
F_m	η δύναμη του κινητήρα
F_N	η κάθετη δύναμη
F_{ss}	η δύναμη τριβής για κίνηση μόνιμης κατάστασης
F_s	η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής ή η δύναμη αποδέσμευσης (break-away force)
F_{slip}	η δύναμη τριβής κατά την ολίσθηση
F_{stick}	η δύναμη τριβής κατά την προσκόλληση
F_{str}	η τριβή Stribeck (που δίνεται από την διαφορά της τριβής Coulomb από την δύναμη αποδέσμευσης)
$F_{str,a}$	η τριβή Stribeck στο τέλος της προηγούμενης περιόδου ολίσθησης
$F_{str,\infty}$	η τριβή Stribeck μετά από μία πολύ μεγάλη περίοδο ακινησίας
F_y	η διαφορά μεταξύ της τάσης διαρροής και της δύναμης του αντίστοιχου σημείου αντιστροφής
$g(\nu)$	μία θετική συνάρτηση που εξαρτάται από τις ιδιότητες των υλικών, την λίπανση και την θερμοκρασία

G	η συνάρτηση μεταφοράς ενός γραμμικού στοιχείου
G_{filter}	η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου με το οποίο η κάρτα ελέγχου υπολογίζει την ταχύτητα της κινούμενης μάζας
G_{linear}	η συνάρτηση μεταφοράς της εγκατάστασης μαζί με τον κατευθυντή και χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής
$G_{linear,i}$	η συνάρτηση μεταφοράς της εγκατάστασης με έλεγχο ρεύματος μαζί με τον κατευθυντή και χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής
$G_{linear,v}$	η συνάρτηση μεταφοράς της εγκατάστασης με έλεγχο τάσης μαζί με τον κατευθυντή και χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής
G_L	η συνάρτηση μεταφοράς του γραμμικού τμήματος ενός μη γραμμικού συστήματος
G_{plant}	η συνάρτηση μεταφοράς της εγκατάστασης
$G_{plant,i}$	η συνάρτηση μεταφοράς της εγκατάστασης με έλεγχο ρεύματος
$G_{plant,v}$	η συνάρτηση μεταφοράς της εγκατάστασης με έλεγχο τάσης
G_{total}	η συνάρτηση μεταφοράς της εγκατάστασης μαζί με τον κατευθυντή
$G_{total,i}$	η συνάρτηση μεταφοράς της εγκατάστασης με έλεγχο ρεύματος μαζί με τον κατευθυντή
$G_{total,v}$	η συνάρτηση μεταφοράς της εγκατάστασης με έλεγχο τάσης μαζί με τον κατευθυντή
h	το βήμα του κοχλία
i	σταθερά του μοντέλου D.M., που καθορίζει το σχήμα της καμπύλης δύναμης-μετατόπισης
i_a	το ρεύμα στα τυλίγματα του δρομέα του DC κινητήρα
J	η ροπή αδράνειας της κινούμενης μάζας, M , και των περιστρεφόμενων τμημάτων
J_κ	η ροπή αδράνειας του κοχλία ως προς τον άξονά του
$J_{ολ}$	η συνολική ροπή αδράνειας της εγκατάστασης
K	η σταθερά του ελατηρίου
K_{amp}	το κέρδος του ενισχυτή
K_b	ο συντελεστής ελαστικής παραμόρφωσης ενός ευλύγιστου τριχιδίου στο μοντέλο B.M.

K_d	το διαφορικό κέρδος ενός PD ή PID κατευθυντή
K_i	το ολοκληρωτικό κέρδος ενός PID κατευθυντή
K_p	το αναλογικό κέρδος ενός PD ή PID κατευθυντή
K_r	συντελεστής σχετικής ελαστικής παραμόρφωσης στο μοντέλο R.I.M.
K_s	συντελεστής ελαστικής παραμόρφωσης της περιοχής προσκόλλησης στο μοντέλο C.M.
K_t	ο συντελεστής εφαπτομενικής δυσκαμψίας της στατικής επαφής
K_T	η σταθερά ροπής του DC κινητήρα
L	η αυτεπαγωγή των τυλιγμάτων του δρομέα του DC κινητήρα
m	ο συντελεστή μετασχηματισμού του κοχλία-οδηγού
N	η D.F. ενός μη γραμμικού στοιχείου
p	η εσωτερική, μονοδιάστατη μεταβλητή θέσης του μοντέλου R.I.M.
p_0	η οριακή τιμή της μεταβλητής θέσης του μοντέλου R.I.M., μεταξύ της προσκόλλησης και της ολίσθησης
r_1	ο συντελεστής αναστροφής του ενισχυτή εύρους παλμού
r_2	ο συντελεστής αναστροφής του κινητήρα
R_a	η αντίσταση των τυλιγμάτων του δρομέα του DC κινητήρα
s	η μεταβλητή καθορισμού της περιοχής λειτουργίας στο μοντέλο C.M. και μεταβλητή διαστήματος των μοντέλων B.S.M.
St	ένας δείκτης της ευστάθειας του συστήματος χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής
t_r	ο χρόνος στον οποίο το σώμα είναι ακινητοποιημένο
T_c	η ροπή της τριβής Coulomb
T'_c	η τριβή Coulomb της τριβής αντιστάθμισης
$\bar{T}_c$	η μέση τιμή της πειραματικά προσδιορισμένης τριβής Coulomb
$T_{c,\varepsilon}$	η ροπή ως προς τον άξονα του κοχλία, της τριβής Coulomb στα έδρανα
$T_{c,ολ}$	η συνολική τριβή Coulomb της εγκατάστασης
$\bar{T}_{c,ολ}$	η μέση τιμή της συνολικής τριβής Coulomb της εγκατάστασης
T_e	η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών
T_f	η ροπή της δύναμης τριβής

$T_{f,bv}$	η ροπή της δύναμης τριβής σύμφωνα με το μοντέλο "ροπή αποδέσμευσης+ιξώδης τριβή"
$T_{f,cv}$	η ροπή της δύναμης τριβής σύμφωνα με το μοντέλο "τριβή Coulomb+ιξώδης τριβή"
$T_{f,gk}$	η ροπή της δύναμης τριβής σύμφωνα με το γενικό κινητικό μοντέλο τριβής
T_m	η ροπή του κινητήρα
$T_{m,mb}$	η ροπή ελέγχου κατά τον MB έλεγχο
$T_{m,mbbv}$	η ροπή ελέγχου κατά τον MBBV έλεγχο
$T_{m,mbcv}$	η ροπή ελέγχου κατά τον MBCV έλεγχο
$T_{m,mbgk}$	η ροπή ελέγχου κατά τον MBGK έλεγχο
$T_{m,pd}$	ροπή ελέγχου κατά τον PD έλεγχο
$T_{m,pdbv}$	ροπή ελέγχου κατά τον PDBV έλεγχο
$T_{m,pdcv}$	ροπή ελέγχου κατά τον PDCV έλεγχο
$T_{m,pdgk}$	ροπή ελέγχου κατά τον PDGK έλεγχο
T_{nl}	το μη γραμμικό τμήμα της τριβής
T'_{nl}	το μη γραμμικό τμήμα της τριβής αντιστάθμισης
T_{pd}	η ροπή του PD κατευθυντή
T_{pid}	η ροπή του PID κατευθυντή
$\bar{T}_s$	η μέση τιμή της πειραματικά προσδιορισμένης ροπής αποδέσμευσης
u	η είσοδος ελέγχου
$V_s(t)$	η συνεχής τάση τροφοδοσίας του DC κινητήρα
x_i	τελική θέση ενός ευλύγιστου τριχιδίου στο μοντέλο B.M.
$x(t)$	η ημιτονοειδής είσοδος ενός μη γραμμικού στοιχείου
X	το πλάτος της ημιτονοειδούς εισόδου του μη γραμμικού στοιχείου
$X_{L.C.}$	το πλάτος του L.C. κατά την D.F.A.
$X_{L.S.,s}$	το πλάτος του L.C. που προέκυψε από την προσομοίωση στο Matlab/Simulink
$y(t)$	η περιοδική έξοδος ενός μη γραμμικού στοιχείου όταν η είσοδος του είναι ημιτονοειδής

$y_1(t)$	η βασική αρμονική συνιστώσα της εξόδου ενός μη γραμμικού στοιχείου όταν η είσοδός του είναι ημιτονοειδής
Y_1	το πλάτος της βασικής αρμονικής συνιστώσας της εξόδου του μη γραμμικού στοιχείου
z	η εσωτερική κατάσταση της τριβής στο μοντέλο M.D.M. ή η μέση παραμόρφωση των τριχιδίων στο μοντέλο L.G.M.
z_{ss}	η μέση παραμόρφωση των τριχιδίων στο μοντέλο L.G.M. στην μόνιμη κατάσταση

1 Εισαγωγή

1.1 Σκοπός εργασίας

Η εργασία αυτή περιγράφει τόσο θεωρητικά όσο και πειραματικά αποτελέσματα τα οποία ρίχνουν περισσότερο φως στο πρόβλημα του ελέγχου με αντιστάθμιση τριβής για σερβομηχανισμούς. Το κίνητρο για την έρευνα των επιπτώσεων της τριβής και για την μοντελοποίησή της πηγάζει από το γεγονός ότι η τριβή είναι ουσιαστικά ανεπιθύμητη, αναπόφευκτη και δύσκολο να μοντελοποιηθεί σε προβλήματα ελέγχου σερβομηχανισμών.

Η εξαγωγή συμπερασμάτων για την συμπεριφορά της και η ανάπτυξη μεθοδολογιών εξάλειψης της επίδρασής της μπορούν να καταστούν πολύτιμες για πολλές εφαρμογές. Εξάλλου, η ανάγκη για όσο το δυνατόν αποδοτικότερο έλεγχο αποτελεί, σχεδόν πάντοτε, πρώτη προτεραιότητα.

1.2 Συνοπτική βιβλιογραφική ανασκόπηση

Η βιβλιογραφία που μελετήθηκε παρατίθεται στο κεφάλαιο Βιβλιογραφία. Κατά το μεγαλύτερο μέρος της αποτελείται από δημοσιεύσεις σχετικές με την μοντελοποίηση της τριβής, την αντιστάθμισή της και την ανάλυση συστημάτων με τριβή. Επιπλέον, συμπληρώνεται από βιβλία σχετικά με την θεωρία του αυτομάτου ελέγχου, την ανάλυση μη γραμμικών συστημάτων ελέγχου, την μοντελοποίηση ηλεκτρομηχανικών διατάξεων και τον προγραμματισμό για έλεγχο σε πραγματικό χρόνο.

Ειδικότερα, λόγω της πολύ μεγάλης ανάγκης για την όσο το δυνατόν καλύτερη κατανόηση των χαρακτηριστικών της τριβής πολλοί ερευνητές έχουν να επιδείξουν πολύ σπουδαίο έργο. Μάλιστα, το μεγάλο ενδιαφέρον για το συγκεκριμένο αντικείμενο ξεκινά από πολύ παλιά, και συγκεκριμένα από τον Leonardo da Vinci στα τέλη του 15^{ου} αιώνα και στις αρχές του 16^{ου} αιώνα, [42]. Οι σημειώσεις του αποτέλεσαν οδηγό για αρκετούς μεταγενέστερους, όπως είναι ο Amontons (1699), [11], και ο Coulomb (1785), [38], στους οποίους οφείλεται ο κλασσικός τρόπος μοντελοποίησης της τριβής. Αργότερα με την εισαγωγή της ιδέας της στατικής τριβής από τον Morin (1833), [71], και της εξίσωσης της ιξώδους ροής ρευστού από τον Reynolds (1866), [81], συμπληρώθηκε το κλασσικό μοντέλο.

Λόγω των όλο και αυξανόμενων αναγκών για μοντελοποίηση τριβής υψηλής ακρίβειας ήδη από το δεύτερο μισό του 20^{ου} αιώνα παρουσιάζεται μία έξαρση πειραματικών παρατηρήσεων που οδηγούν στην ανακάλυψη νέων φαινομένων τριβής, με σκοπό όχι κατ' ανάγκην τον αποδοτικότερο έλεγχο, αλλά προπάντων την κατανόηση τους.

Ειδικότερα, η βιβλιογραφία [23], [27], [37], [40], [80] μελετά τον μηχανισμό της επαφής στην οποία οφείλεται η δημιουργία της στατικής τριβής, καθώς επίσης και τις ιδιότητες της. Επίσης, μία ολοκληρωμένη μελέτη του μηχανισμού δημιουργίας της στατικής τριβής καθώς και ένας τρόπος μοντελοποίησής της με σκοπό τον έλεγχο υψηλής ακρίβειας γίνεται στο άρθρο [59].

Η μεταβλητότητα της μέγιστης τιμής της στατικής τριβής σε συνάρτηση με τον ρυθμό αύξησης της εξωτερικής δύναμης βρέθηκε πειραματικά στο [60], ενώ επιβεβαιώθηκε πειραματικά στο άρθρο [83].

Η μελέτη της μετάβασης από την προσκόλληση στην ολίσθηση, που ονομάστηκε “stick-slip”, ξεκίνησε από τους Bowden-Leben (1939), [26]. Η εξάρτηση της μέγιστης τιμής της στατικής τριβής από τον χρόνο που ξοδεύτηκε στην στατική περιοχή αποτελεί ιδιότητα αυτής της κίνησης που μελετήθηκε στο άρθρο [79].

Όσον αφορά τα χαρακτηριστικά της τριβής κατά την κίνηση, τα άρθρα [19], [41], [91] αναφέρονται στην γενικευμένη καμπύλη Stribeck. Επίσης, διάφορες είναι οι παραμετροποιήσεις που έχουν προταθεί για το κινητικό μέρος της τριβής, όπως αυτές που δίνονται στην βιβλιογραφία [12], [13], [90]. Ακόμη, στις ιδιότητες του οριακού στρώματος του λιπαντικού αναφέρεται το [27].

Ο προσδιορισμός της μηδενικής ταχύτητας, που είναι ένα από τα βασικά μειονεκτήματα των κινητικών μοντέλων τριβής, αντιμετωπίστηκε στο άρθρο [61].

Η κίνηση με μεταβλητή ταχύτητα οδηγεί σε φαινόμενα υστέρησης της δύναμης της τριβής ως προς την ταχύτητα, τα οποία μελετήθηκαν στα άρθρα [17], [74]. Αποδείξεις για την ύπαρξη αυτών των φαινομένων είναι διαθέσιμες από ένα πολύ μεγάλο εύρος πειραματικών πηγών, [79], [82], [85].

Ένα από τα μοντέλα χρονικής εξάρτησης (H.S.M.) αναπτύσσεται στο [74], ενώ στην κατηγορία αυτή των μοντέλων ανήκει και το εμπειρικά υποκινούμενο μοντέλο τριβής των επτά παραμέτρων (S.P.M.) που περιγράφεται στο [15]. Προσεγγιστικές τιμές για τα εύροι των παραμέτρων του τελευταίου μοντέλου προέκυψαν στα [13], [51], [57], [58], [62], [77].

Τα μοντέλα μεταβλητών κατάστασης (S.V.F.M.) αναπτύχθηκαν από την κοινότητα της μηχανικής των τεκτονικών πλακών, [45], [52], [68], [75], [82], [84]. Ενώ τα μοντέλα αυτά έχουν αναπτυχθεί για πειράματα για την τριβή σε πλάκες, οι ιδιότητές τους έχουν πρόσφατα παρατηρηθεί για ένα εύρος υλικών, [36], [45]. Πρόσφατα αυτά τα μοντέλα βελτιώθηκαν ώστε να περιλαμβάνουν την εξάρτηση και από το κάθετο φορτίο, [68].

Ένα από τα μοντέλα τριβής που ανήκουν σ' αυτήν την κατηγορία είναι το μοντέλο του Dahl (D.M.), [43]. Τα μειονεκτήματα του μοντέλου αυτού παρατηρήθηκαν σε μία αριθμητική προσομοίωση στην [72], ενώ προσπάθειες τροποποίησης του έγιναν στην [54].

Επιπλέον, ένα πλήθος από δυναμικά μοντέλα έχει αναπτυχθεί από τους Bliman-Sorine, σε μία σειρά από άρθρα, [20], [21], [22], στηριζόμενοι κυρίως στις πειραματικές παρατηρήσεις του Rabinowitz, [78]. Η προσπάθειά τους αποσκοπούσε κυρίως στην βελτίωση του μοντέλου D.M. Στον ίδιο σκοπό αποσκοπούσε και η προσπάθεια μοντελοποίησης της τριβής με βάσει το μοντέλο D.M. που έγινε από τον Canudas στο άρθρο [35].

Επιδιώκοντας την ενσωμάτωση του φυσικού φαινομένου της αλληλεπίδρασης των προεξοχών των δύο τριβόμενων επιφανειών οι Haessig-Friedland δημιούργησαν ένα ακόμη μοντέλο τριβής μεταβλητών κατάστασης, το "bristle model" (B.M.), [53]. Συγχρόνως, προσπάθησαν να εξαλείψουν το βασικό μειονέκτημα της προσέγγισης Karnopp στην οποία οφείλεται η ανεπιτυχής εφαρμογή του σε συστήματα πολύ υψηλής τάξης δημιουργώντας το "reset integrator model" (R.I.M.).

Επίσης, στο άρθρο [36] αναπτύσσεται το "Lund-Grenoble model" (L.G.M.), το οποίο ενσωματώνει έναν μηχανισμό δημιουργίας της στατικής τριβής καθώς επίσης και τα χαρακτηριστικά της τριβής ευσταθούς κατάστασης. Ένας τρόπος πειραματικού προσδιορισμού των παραμέτρων αυτού του μοντέλου περιγράφεται στο [5]. Επειδή, όμως, το μοντέλο L.G.M. χρησιμοποιεί ως μεταβλητή κατάστασης μία μη μετρήσιμη μεταβλητή, είναι αναγκαίο να δημιουργηθεί ένας παρατηρητής, ο οποίος συνθέτεται στο [6], ενώ συγχρόνως παρατίθενται πειραματικά αποτελέσματα.

Όσον αφορά την πρόβλεψη των συνθηκών για κίνηση "stick-slip" και γενικότερα την ανάλυση συστημάτων με τριβή, αυτή μπορεί να γίνει με διάφορες μεθόδους, με αποτέλεσμα ένας μεγάλος αριθμός δημοσιεύσεων να αναφέρεται σ' αυτό το θέμα. Ειδικότερα, στις αναφορές [39], [44], [88] και [89] εφαρμόζεται η μέθοδος της αλγεβρικής ανάλυσης (Algebraic Analysis). Επίσης, στην εφαρμογή της μεθόδου με περιγραφική συνάρτηση (Describing Function Analysis) στην ανάλυση συστημάτων με τριβή αναφέρονται οι αναφορές [10], [16], [18], [24], [25], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [63], [86], [87], [92], [93].

Ένα μεγάλο κομμάτι της βιβλιογραφίας αναφέρεται στην εφαρμογή μοντέλων τριβής με σκοπό την αντιστάθμιση καθώς και στον πειραματικό προσδιορισμό της τριβής. Ειδικότερα, στα άρθρα [15], [66], [67], [76], παρουσιάζεται μια γενική περιγραφή και σύγκριση των ήδη χρησιμοποιηθέντων μοντέλων τριβής.

Επίσης, στο άρθρο [7] συγκρίνονται δύο μοντέλα τριβής, το L.G.M. με το γενικό κινητικό μοντέλο τριβής. Μάλιστα, το τελευταίο κρίθηκε υπεραρκετό για κίνηση μιας κατεύθυνσης.

Σύγκριση μοντέλων τριβής σε μία πειραματική διάταξη γίνεται και στο άρθρο [70]. Ειδικότερα, χρησιμοποιείται αντιστάθμιση τριβής με παρατηρητές βασισμένους στο κλασσικό μοντέλο τριβής, στο R.I.M. και στο D.M. Συγκρίνοντας τους τρεις τρόπους

αντιστάθμισης, προέκυψε ότι αν και τα φαινόμενα που ενσωματώνει το κλασσικό μοντέλο είναι λιγότερα από τα υπόλοιπα δύο, τα αποτελέσματά του θεωρούνται καλύτερα.

Επίσης, στο άρθρο [65] χρησιμοποιείται ένα μοντέλο τριβής βασισμένο στην ροπή προκειμένου να αντιμετωπιστούν τα σφάλματα κατά την κίνηση ενός απτικού μηχανισμού.

Ακόμη, στο άρθρο [8] γίνεται προσπάθεια εξαγωγής μοντέλων τριβής από τις ιδιότητες των υλικών και της επιφάνειας, με σκοπό να χρησιμοποιηθούν για έλεγχο.

Η επίτευξη ευσταθούς κίνησης χρησιμοποιώντας αντιστάθμιση τριβής και PD κατευθυντή αποτελεί αντικείμενο του άρθρου [47].

Επιπλέον, η βιβλιογραφία [1], [2], [50], [73], [74] αναφέρεται στην θεωρία του αυτομάτου ελέγχου και των μη γραμμικών συστημάτων, ενώ η βιβλιογραφία [3], [4] στην ανάλυση ηλεκτρομηχανικών συστημάτων.

Ο προγραμματισμός των προγραμμάτων ελέγχου σε πραγματικό χρόνο έγινε με την βοήθεια της βιβλιογραφίας [64], [69].

1.3 Δομή Εργασίας

Το κύριο μέρος της εργασίας αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Το Κεφάλαιο 2 περιγράφει αναλυτικά την φυσική της τριβής για όλα τα είδη κινήσεων. Ειδικότερα, περιγράφει τις αιτίες δημιουργίας της τριβής και τις ιδιότητές της τόσο κατά την φάση της ακινησίας όσο και κατά την κίνηση είτε με σταθερή είτε με μεταβαλλόμενη ταχύτητα. Η κατανόηση της φύσης της τριβής αποτελεί ένα πολύ σημαντικό βήμα για την ακριβέστερη μοντελοποίησή της.

Το Κεφάλαιο 3 παραθέτει, σχολιάζει και αναλύει ορισμένα από τα ήδη ανεπτυγμένα και εφαρμοσμένα μοντέλα τριβής. Τα μοντέλα έχουν ομαδοποιηθεί σε κατηγορίες ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της τριβής τα οποία μοντελοποιούν, ώστε να είναι εφικτή η σύγκρισή τους. Η μοντελοποίηση της τριβής καθίσταται απαραίτητο εργαλείο στην προσπάθεια για πλήρη κατανόηση των επιπτώσεων της και των μεθόδων αντιμετώπισης αυτών.

Το Κεφάλαιο 4 αποτελεί μία γενική περιγραφή των μεθόδων ανάλυσης μη γραμμικών συστημάτων ελέγχου. Με άλλα λόγια περιγράφει τις μεθόδους με τις οποίες είναι εφικτή η πρόβλεψη της συμπεριφοράς των μη γραμμικών συστημάτων, στην κατηγορία των οποίων ανήκουν και τα συστήματα με τριβή. Επιπλέον δίνει μεγαλύτερη έμφαση στην ανάλυση αυτών των συστημάτων με την μέθοδο της Περιγραφικής Συνάρτησης η οποία και εφαρμόστηκε στη συγκεκριμένη εργασία.

Το Κεφάλαιο 5 εφαρμόζει τη μέθοδο ανάλυσης με περιγραφική συνάρτηση σε συστήματα ελέγχου 2ης και άνω τάξης με τριβή. Η μελέτη συστημάτων διαφόρων τάξεων με τη συγκεκριμένη μέθοδο αποσκοπεί στην εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων που θα ισχύουν ανεξάρτητα από την τάξη του συστήματος. Επιπλέον μελετάται η επίδραση της

αντιστάθμισης τριβής στην συμπεριφορά αυτών των συστημάτων, ενώ παράλληλα εξετάζεται η ισχύς των αποτελεσμάτων της μεθόδου.

Το Κεφάλαιο 6 περιγράφει τα αποτελέσματα της εφαρμογής διαφόρων νόμων ελέγχου με αντιστάθμιση τριβής σε μία πειραματική διάταξη. Η επίτευξη του επιθυμητού αποτελέσματος, που είναι η εξάλειψη των επιπτώσεων της τριβής, απαιτεί την ακριβή μοντελοποίηση της πειραματικής διάταξης, άρα και την ακριβή μοντελοποίηση της τριβής του συγκεκριμένου συστήματος. Γι' αυτόν τον λόγο εφαρμόζονται διάφορα μοντέλα τριβής προκειμένου να είναι δυνατή η εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων για την αποτελεσματικότητά τους στην αντιστάθμιση τριβής.

Τέλος, το Κεφάλαιο 7 παραθέτει συνοπτικά τα συμπεράσματα που προέκυψαν από το σύνολο των προηγούμενων κεφαλαίων, ενώ συγχρόνως αναφέρει ορισμένες από τις εργασίες που θα μπορούσαν να υλοποιηθούν μελλοντικά.

2 Φυσική της τριβής

Η μοντελοποίηση της τριβής, με σκοπό την αντιστάθμισή της, αποτελεί ένα σημαντικό όπλο στα χέρια του μηχανικού ελέγχου αρκεί να επιτευχθεί η όσο το δυνατόν καλύτερη διαχείριση των ήδη παρατηρημένων φαινομένων τριβής. Μόνο μ' αυτόν τον τρόπο μπορεί να καταλήξει σε απλά μοντέλα τριβής που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν με αρκετή επιτυχία σε μηχανικά προβλήματα ελέγχου.

Η δύναμη τριβής, ως μία εφαιπτομενική δύναμη αντίδρασης μεταξύ δύο επιφανειών σε επαφή, είναι το αποτέλεσμα πολλών διαφορετικών μηχανισμών, όπως για παράδειγμα η γεωμετρία και η τοπολογία επαφής, οι ιδιότητες του κυρίου μέρους και της επιφάνειας του υλικού των σωμάτων και η παρουσία λίπανσης. Επίσης η προσβολή της επιφάνειας από διάφορες ουσίες είναι ένας επιπλέον παράγοντας που εισάγει δυσκολίες.

Στην ακόλουθη ανάλυση των συνηθέστερων χαρακτηριστικών της τριβής θα θεωρηθεί ότι στην επιφάνεια επαφής υπάρχει λιπαντικό, όπως συμβαίνει στα περισσότερα μηχανικά συστήματα, γεγονός που καθορίζει σε μεγάλο ποσοστό τα φαινόμενα που αναμένεται να χαρακτηρίζουν την τριβή. Ειδικότερα, σ' αυτήν την περίπτωση διακρίνονται οι κάτωθι περιοχές συμπεριφοράς της τριβής:

- Η περιοχή της στατικής τριβής και της προ-ολίσθησης μετατόπισης,
- Η περιοχή της τριβής ολίσθησης,
- Η περιοχή της κίνησης με μεταβαλλόμενη ταχύτητα.

2.1 Η περιοχή της στατικής τριβής και της προ-ολίσθησης μετατόπισης

Τα φαινόμενα τα οποία λαμβάνουν χώρα κατά την ανάπτυξη της δύναμης της τριβής μεταξύ δύο τριβόμενων επιφανειών μπορούν να γίνουν κατανοητά αν και μόνο αν αρχικά κατανοηθούν οι λόγοι στους οποίους οφείλεται η δημιουργία αυτής της δύναμης. Όμως, ο μόνος τρόπος να γίνουν αντιληπτοί όλοι εκείνοι οι παράγοντες που οδηγούν στην δημιουργία της δύναμης τριβής είναι μέσω της μικροσκοπικής ανάλυσης του φαινομένου της επαφής των δύο επιφανειών. Μάλιστα, η ανάλυση της δομής του όλου φαινομένου μπορεί να οδηγήσει σε καλύτερη και ακριβέστερη μοντελοποίηση της τριβής.

Η παραδοσιακή ιδέα για την τοπολογία της επαφής μεταξύ δύο επιφανειών λέει ότι η τριβή είναι το αποτέλεσμα των δυνάμεων που ασκούνται μεταξύ δύο επιφανειών, λόγω των κορυφών και των κοιλάδων από τα οποία συντίθεται κάθε επιφάνεια. Επίσης, σύμφωνα μ' αυτήν την ιδέα, οι κορυφές και οι κοιλάδες των δύο επιφανειών παραμένουν ανεξάρτητες, που σημαίνει ότι δεν λαμβάνουν χώρα φαινόμενα, όπως τοπική σύνθλιψη

του υλικού, διαφόρων ειδών χημικές αντιδράσεις, κ.α. Ωστόσο, έχει αποδειχθεί ότι η παραπάνω ιδέα πολύ δύσκολα μπορεί να εξηγήσει τις συμπεριφορές της τριβής.

Οι Bawden-Tabor, βλ. [27], απέδειξαν ότι ο μηχανισμός της επαφής αποτελείται στην πραγματικότητα από συνδέσεις που είναι οι περιοχές στις οποίες συμβαίνουν οι επαφές πολύ μικρών προεξοχών. Συγκεκριμένα, σύμφωνα μ' αυτούς, λαμβάνει χώρα ψυχρή συγκόλληση και σκληρή προσκόλληση, πράγμα που έχει ως αποτέλεσμα να συνθλίβονται σε ένα συνεχές στερεό, όπως ακριβώς συναντάμε στην πλαστικότητα. Απέδειξαν επίσης ότι η κυριότερη συνεισφορά της δύναμης της τριβής προέρχεται από την παραμόρφωση των συνδέσεων και επιπλέον από την δύναμη που απαιτείται για να «οργώσει» η μία επιφάνεια την άλλη.

Λόγω της παραμόρφωσης των συνδέσεων παρατηρείται μια προ-ολίσθησης κίνηση. Αφού η συνολική επιφάνεια των συνδέσεων είναι μικρότερη από την προφανή επιφάνεια επαφής είναι φανερό ότι η επιφάνεια η οποία φέρει το φορτίο είναι πολύ μικρή, οπότε οι συνδέσεις αυτές παρέχουν την μεγαλύτερη μετατόπιση την οποία παρατηρούμε κατά την φάση της προ-ολίσθησης. Η ιδέα αυτή του ενός και συνεχούς υλικού μπορεί να εφαρμοστεί σε απλές επαφές μετάλλου με μέταλλο όσο και σε πολύπλοκες περιπτώσεις, εφ' όσον αναφερόμαστε στην τριβή ολίσθησης, και μπορούν να δώσουν μια εξήγηση για την ταύτιση που υπάρχει μεταξύ της πλαστικότητας και της προ-ολίσθησης κίνησης.

Οι δυνάμεις, όμως, οι οποίες μπορούν να αναπτυχθούν μεταξύ των πολύ μικρών προεξοχών της επιφάνειας δεν μπορούν να είναι απεριόριστα μεγάλες. Αντιθέτως, υπάρχει ένα άνω όριο στο οποίο δεν υπάρχει πλέον επαφή μεταξύ των προεξοχών των επιφανειών, οπότε ξεκινά η σχετική ολίσθηση. Το όριο αυτό της δύναμης της τριβής που αναπτύσσεται κατά το πέρας της στατικής περιοχής ονομάζεται «δύναμη αποδέσμευσης» (break-away force) και μαζί με την προ-ολίσθησης μετατόπιση αποτελούν χαρακτηριστικές παραμέτρους της περιοχής αυτής.

Παρακάτω αναπτύσσονται τα ποσοτικά και ποιοτικά χαρακτηριστικά της περιοχής της στατικής τριβής, τα οποία έχουν παρατηρηθεί μέχρι σήμερα, και ενδιαφέρουν τον μηχανικό ελέγχου.

2.1.1 Ποσοτικά χαρακτηριστικά της στατικής τριβής

Έχει παρατηρηθεί πειραματικά ότι:

- Η στατική τριβή μεταβάλλεται με τον χρόνο και την θέση
- Η δυναμική της στατικής τριβής είναι προσωρινά αμετάβλητη με τον χρόνο και τοπικά ανεξάρτητη της θέσης

2.1.1.1 Η μεταβολή της στατικής τριβής με τον χρόνο και την θέση

Πολλοί ερευνητές, όπως οι Rankin, Courtney, βλ. [40], [80], αντίστοιχα, έχουν παρατηρήσει ότι είναι πολύ δύσκολο να βρεθούν επαναλαμβανόμενα ποσοτικά αποτελέσματα. Αυτό ισχύει ακόμα και για καλά προετοιμασμένα πειράματα με τριβή μετάλλου με μέταλλο, βλ. [40], και χωρίς να αναφερθούν οι μηχανισμοί σε μηχανές του εμπορίου. Αυτή η μεταβλητότητα μπορεί να αποδοθεί σε πολλούς λόγους, όπως η θερμοκρασία, η υγρασία, το μεταβαλλόμενο φορτίο, η γήρανση, η κακή ευθυγράμμιση του άξονα, η ανομοιόμορφη κατανομή του λιπαντικού και η καταστροφή και η επαναδημιουργία της δομής μεταξύ των δύο επιφανειών. Η διακύμανση, για παράδειγμα στην δύναμη αποδέσμευσης, μπορεί να είναι τόσο μεγάλη όσο είναι ορισμένες φορές μεταξύ δύο διαφορετικών σημείων.

2.1.1.2 Η μεταβολή της δυναμικής της στατικής τριβής με τον χρόνο και την θέση

Η δυναμική της στατικής τριβής είναι προσωρινά αμετάβλητη με τον χρόνο και τοπικά ανεξάρτητη της θέσης. Ειδικότερα, ο όρος προσωρινά χρονικά αμετάβλητη σημαίνει ότι οι ιδιότητες του συστήματος παραμένουν σταθερές κατά την διάρκεια ενός μικρού διαστήματος που μας ενδιαφέρει. Συνήθως αυτό το μικρό διάστημα είναι αρκετά μεγάλο για τους σκοπούς του ελέγχου. Ο όρος τοπικά αμετάβλητη με την θέση σημαίνει ότι οι ιδιότητες του συστήματος παραμένουν αμετάβλητες αν παραμείνει στο προ-ολίσθησης εύρος ενός οποιουδήποτε ανεξάρτητου σημείου. Αυτή η ιδιότητα είναι υπεύθυνη για τις επαναλαμβανόμενες ποιοτικές αποκρίσεις.

Η δεύτερη ιδιότητα διευκολύνει τον σχεδιασμό του συστήματος ελέγχου. Επιτρέπει στον μηχανικό ελέγχου να θεωρήσει ότι η αβεβαιότητα στις παραμέτρους του συστήματος είναι χρονικά αμετάβλητη.

2.1.2 Ποιοτικά χαρακτηριστικά της στατικής τριβής

Η ποιοτική συμπεριφορά της στατικής τριβής είναι πολύ επίμονη και επαναλαμβανόμενη, ενώ λίγες μόνο εξαιρέσεις έχουν βρεθεί. Αυτές οι εξαιρέσεις είναι προσωρινές και πολύ μικρές και μπορούν δικαιολογημένα να αποδοθούν στην αναπόφευκτη μεταβολή της τοπικής δομής. Ειδικότερα, η συμπεριφορά μπορεί εύκολα να διαιρεθεί στις ακόλουθες περιοχές:

1. Μικρές μετατοπίσεις,
2. Μεγάλες μετατοπίσεις.

2.1.2.1 Μικρές μετατοπίσεις

Σ' αυτήν την περιοχή όλες οι μικρές προεξοχές των επιφανειών είναι κολλημένες. Ειδικότερα, η δύναμη τριβής δεν αυξάνεται, διότι και οι εξοχές και το οριακό στρώμα του λιπαντικού παραμορφώνονται ελαστικά. Γι' αυτόν τον λόγο η περιοχή αυτή χαρακτηρίζεται μόνο από την δυσκαμψία των προεξοχών κατά την ακινησία τους. Μάλιστα αυτή η παράμετρος δεν εξαρτάται από το αν υπάρχει λίπανση ή όχι.

2.1.2.2 Μεγάλες μετατοπίσεις

Σ' αυτήν την περιοχή οι μικρές προεξοχές της επιφάνειας κινούνται. Η δύναμη τριβής, σε αντίθεση με την προηγούμενη περιοχή αυξάνεται, διότι και οι προεξοχές της επιφάνειας και το οριακό στρώμα του λιπαντικού παραμορφώνονται πλαστικά. Μάλιστα, η δύναμη τριβής καθορίζεται κυρίως από την δύναμη που απαιτείται για να υπερνικηθεί η δύναμη αποδέσμευσης. Ειδικότερα, η περιοχή αυτή μπορεί να διαιρεθεί σε δύο επιμέρους:

2.1. Πλαστική παραμόρφωση

2.2. Παραμόρφωση μη γραμμικού ελατηρίου

2.1.2.2.1 Πλαστική παραμόρφωση

Η πλαστική παραμόρφωση δημιουργεί μόνιμη μετατόπιση και χαρακτηρίζεται από δύο φαινόμενα: τον «ερπυσμό» (creep motion) και την «σκλήρυνση του υλικού» (work hardening). Με τον όρο «ερπυσμό» καθορίζεται η συνεχής παραμόρφωση κάτω από ένα σταθερό φορτίο, αν και μπορεί να παρατηρηθεί και όταν το φορτίο είναι ασυνεχές. Λόγω της σκλήρυνσης του υλικού, ο ρυθμός της παραμόρφωσης μειώνεται και τελικά σταματά. Η σκλήρυνση του υλικού είναι σχεδόν ισοτροπική, που σημαίνει ότι η ποσότητα της σκλήρυνσης σε μια κατεύθυνση, εφαρμόζεται και στην άλλη κατεύθυνση. Επίσης, έχει παρατηρηθεί πειραματικά ότι κάθε εφαρμοζόμενη δύναμη αντιστοιχεί σε μία μέγιστη πιθανή σκλήρυνση του υλικού (maximum possible work hardening-M.P.W.).

Μπορούμε να μεταχειριστούμε την κίνηση του ερπυσμού ως την μεταβατική απόκριση της πλαστικής παραμόρφωσης, και η συσσωρευμένη ποσότητα του ερπυσμού για τις δύο κατευθύνσεις είναι όμοια με το μέγεθος της σκλήρυνσης του υλικού. Δεν θα δημιουργηθεί περισσότερη πλαστική παραμόρφωση αν το M.P.W., που σχετίζεται με την εφαρμοζόμενη κίνηση είναι μικρότερο από την τρέχουσα ποσότητα της σκλήρυνσης του υλικού. Διαφορετικά υπάρχει πάντοτε ερπυσμός ακόμα κι αν η εφαρμοζόμενη δύναμη είναι μικρότερη από την μέγιστη δύναμη που εφαρμόστηκε ποτέ.

2.1.2.2.2 Παραμόρφωση μη γραμμικού ελατηρίου

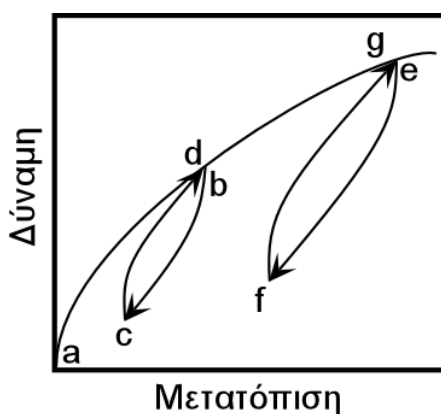
Αποτελεί τμήμα της προ-ολίσθησης κίνησης όταν δεν υπάρχει πλέον πλαστική παραμόρφωση. Μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί όταν σταματά ο ερπυσμός και η

σκλήρυνση του υλικού, ενώ συνήθως εμφανίζεται με την μορφή ενός βρόχου υστέρησης. Αυτή η κίνηση χαρακτηρίζεται από δύο ιδιότητες:

Ιδιότητα 1

Έστω ότι η κατεύθυνση της εφαρμοζόμενης δύναμης αντιστρέφεται, για παράδειγμα από αυξανόμενη δύναμη αρχίζει και μειώνεται ή γίνεται αντίθετη. Το σημείο στο διάγραμμα δύναμης-μετατόπισης στο οποίο η δύναμη αρχίζει να μειώνεται καλείται σημείο αντιστροφής. Για παράδειγμα στο Σχ. 2-1 ορίζονται δύο σημεία αντιστροφής, τα b , e . Επιπλέον, τα σημεία c , f θα ονομάζονται αντίστοιχα σημεία αντιστροφής των b , e .

Τότε, η παράγωγος της δύναμης ως προς την μετατόπιση μετά την αντιστροφή είναι μία θετική και όχι αύξουσα συνάρτηση της απόστασης μετρούμενη μόνο από το σημείο αντιστροφής, και είναι ανεξάρτητη της θέσης και της δύναμης του σημείου αντιστροφής.



Σχήμα 2-1. Το φαινόμενο μνήμης της στατικής τριβής.

Αυτή η ιδιότητα φαίνεται στο Σχ. 2-1. Έστω ότι μετακινείται η καμπύλη ef έτσι ώστε το σημείο e να συμπίπτει με το σημείο b . Τότε διαπιστώνεται ότι οι καμπύλες ef και bc ταιριάζουν. Επιπλέον, αν η καμπύλη ef στραφεί ωρολογιακά κατά 180° , και το σημείο e συμπίπτει με το σημείο f και c , αντίστοιχα, τότε βρίσκεται πως η καμπύλη ef ταιριάζει με τις καμπύλες fg και cd .

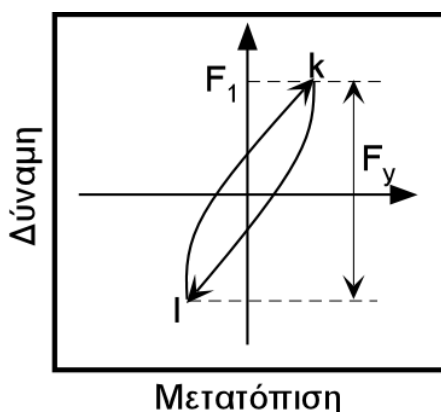
Το φαινόμενο αυτό αφορά το ενδιαφέρον φαινόμενο μνήμης της στατικής τριβής. Από την στιγμή που η δύναμη αντιστρέφεται αρχίζει να δημιουργείται μια καμπύλη δύναμης-μετατόπισης η οποία θα προσπαθήσει να ξαναπεράσει από το σημείο όπου η δύναμη άρχισε να αντιστρέφεται, όταν η δύναμη πάρει και πάλι την τιμή πριν την αντιστροφή.

Επιπλέον, η ιδιότητα αυτή επιβεβαιώνει το φαινόμενο Bauchinger. Ειδικότερα, υπαινίσσεται ότι η δυσκαμψία του ελατηρίου, η οποία αντιπροσωπεύεται από την παράγωγο της δύναμης ως προς την επιμήκυνση, μειώνεται από μία υψηλότερη τιμή σε

μία χαμηλότερη τιμή καθώς απομακρύνεται από το σημείο αντιστροφής. Σε περιπτώσεις που υπάρχει μία απότομη αλλαγή στην δυσκαμψία, όπως στις περιπτώσεις του Σχ. 2-1, μπορεί να καθοριστεί ένα σημείο διαρροής, που αν και δύσκολα, μπορεί να συσχετιστεί με κάθε σημείο αντιστροφής.

Στο Σχ. 2-2 ορίζεται ένα σημείο αντιστροφής, k , το οποίο το συσχετίζουμε με το σημείο διαρροής. Έστω ότι F_y είναι η διαφορά μεταξύ της τάσης διαρροής, ή πιο συγκεκριμένα της δύναμης διαρροής, όσον αφορά την κίνηση της τριβής, και της δύναμης του αντίστοιχου σημείου αντιστροφής, l . Τότε, η F_y θα είναι η ίδια και για την θετικώς κατευθυνόμενη κίνηση, lk , και για την αρνητικώς κατευθυνόμενη κίνηση, kl .

Έστω η περίπτωση της θετικώς κατευθυνόμενης κίνησης, lk , με αρχή να είναι το αντίστοιχο σημείο αντιστροφής, l . Αν υποτεθεί ότι η δύναμη αυξάνεται σε F_1 και στην συνέχεια αντιστρέφεται, τότε κατά την κίνηση αυτή, που είναι η αρνητικώς κατευθυνόμενη κίνηση, το μη γραμμικό ελατήριο θα διαρρεύσει στο σημείο $F_1 - F_y$ παρά στο σημείο $-F_y$, που είναι η αυθεντική δύναμη διαρροής για την αρνητικώς κατευθυνόμενη κίνηση. Αυτό σημαίνει ότι το όριο διαρροής σε αρνητικώς κατευθυνόμενη κίνηση έχει ελαττωθεί.



Σχήμα 2-2. Επιβεβαίωση του φαινομένου Bauginger.

Προφανώς, αυτό συμπίπτει με το φαινόμενο Bauginger στην πλαστικότητα, το οποίο λέει ότι «αν ένα υλικό καταπονηθεί εφελκυστικά πέραν του ορίου διαρροής του, τότε σε κάθε νέα εφελκυστική φόρτιση το όριο διαρροής σε εφελκυσμό αυξάνει, ενώ το όριο διαρροής σε θλίψη ελαττώνεται».

Ιδιότητα 2

Εφ' όσον έχει συμπληρωθεί ο βρόχος υστέρησης η καμπύλη ξαναπερνά από το σημείο αντιστροφής, από το οποίο, όμως, περνούν και άλλοι, προηγούμενοι κλάδοι που

κατευθύνονται στην ίδια κατεύθυνση. Η κλίση της καμπύλης μετά απ' αυτό το σημείο θα είναι ίδια με την κλίση εκείνου του κλάδου που έχει την μικρότερη κλίση στο σημείο αυτό.

Για παράδειγμα, στο Σχ.2-1, μετά το σημείο d η καμπύλη διατηρεί την κλίση που είχε πριν πραγματοποιηθεί η αντιστροφή στο σημείο b.

Αυτές οι δύο ιδιότητες έχουν τις ακόλουθες συνέπειες:

- Κάθε σημείο αντιστροφής θα ξανακαλυφθεί εφ' όσον η δύναμη θα πάρει την αντίστοιχη τιμή ανεξάρτητα από το πόσες αντιστροφές έχουν συμβεί μέχρι εκείνη την στιγμή.
- Όταν ένας συγκεκριμένος βρόχος υστέρησης έχει παρατηρηθεί, η μνήμη των δύο σημείων αντιστροφής που συνθέτουν τον βρόχο εξαφανίζεται.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η συμπεριφορά της στατικής τριβής είναι πολύ κοντά στην συμπεριφορά των πλαστικών στερεών. Θα μπορούσε να είναι, επομένως, αρκετά χρήσιμη η γνώση του τρόπου με τον οποίο μοντελοποιείται η συμπεριφορά των πλαστικών στερεών στην βιβλιογραφία. Ένας τρόπος, βλ. [23], [37], να γίνει η μοντελοποίηση αυτής της συμπεριφοράς είναι να καθοριστεί αρχικά ένα απλοποιημένο πλαστικό στοιχείο, το οποίο αποτελείται συνήθως από μία γραμμική περιοχή που ακολουθείται από μία περιοχή γραμμικής ή μη γραμμικής σκλήρυνσης του υλικού. Έπειτα, ανάλογα με την ακρίβεια που απαιτείται, πολλά βασικά στοιχεία με διαφορετικές παραμέτρους συνδυάζονται για να προσεγγίσουν την πραγματική απόκριση.

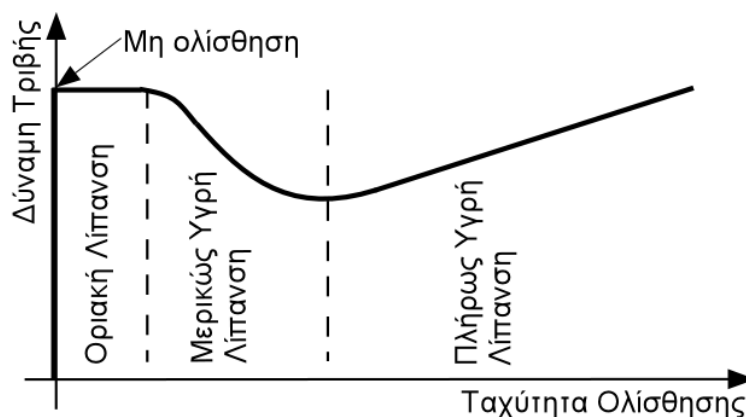
Όταν εφαρμόζεται μία κυκλική δύναμη, τότε, υιοθετούνται ισοτροπικοί, κινηματικοί ή ανεξάρτητοι κανόνες σκλήρυνσης. Σ' αυτούς τους τρεις κανόνες, μόνο ο κινηματικός κανόνας σκλήρυνσης λαμβάνει υπόψη το φαινόμενο Bauchinger με την ολοκληρωμένη μορφή του, ενώ ο ισοτροπικός κανόνας αγνοεί τελείως αυτό το φαινόμενο. Η χρονικά-εξαρτώμενη απόκριση ερπυσμού συνήθως συζητείται ξεχωριστά και δεν συμπεριλαμβάνεται σε αυτά τα μοντέλα. Μία σημαντική διαφορά μεταξύ του ερπυσμού στην πλαστικότητα και εκείνης στην προ-ολίσθησης κίνηση είναι ότι στην πρώτη περίπτωση, εκτός από τις υψηλές θερμοκρασίες, συνήθως λαμβάνει χώρα αρκετό χρόνο, ενώ στην τελευταία περίπτωση εξελίσσεται πολύ πιο γρήγορα.

2.2 Η περιοχή της τριβής ολίσθησης

Όταν η στατική τριβή προσεγγίσει την δύναμη αποδέσμευσης (break-away force) τότε οι δύο τριβόμενες επιφάνειες αρχίζουν να ολισθαίνουν η μία πάνω στην άλλη. Σ' αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχουν πλέον οι συνδέσεις που δημιουργούνται από την επαφή των μικροεξοχών των δύο επιφανειών. Αυτό σημαίνει ότι η τριβή που αναπτύσσεται δεν

οφείλεται στην αντίσταση που εμφανίζουν οι συνδέσεις των μικροεξοχών λόγω της διατμητικής αντοχής των τελευταίων. Αντιθέτως, θεωρώντας ότι η ζώνη επαφής τροφοδοτείται με λιπαντικό, το εξωτερικό φορτίο στηρίζεται μόνο από το στρώμα λιπαντικού που αναπτύσσεται στην ζώνη επαφής.

Επιπλέον, επειδή τα χαρακτηριστικά του στρώματος του λιπαντικού, όπως για παράδειγμα το πάχος του και η θερμοκρασία του, εξαρτώνται από την σχετική ταχύτητα που έχει αναπτυχθεί μεταξύ των τριβόμενων επιφανειών, είναι φανερό ότι η τριβή που αναπτύσσεται σ' αυτήν την περιοχή εξαρτάται από την σχετική ταχύτητα των δύο επιφανειών. Το σχήμα που ακολουθεί παρουσιάζει την γενικευμένη καμπύλη Stribeck, την σχέση δηλαδή που υπάρχει μεταξύ της δύναμης της τριβής και της σχετικής ταχύτητας, βλ. [19], [41], [91].



Σχήμα 2-3. Η γενικευμένη καμπύλη Stribeck, δείχνοντας την τριβή σαν μια συνάρτηση της ταχύτητας για χαμηλές ταχύτητες.

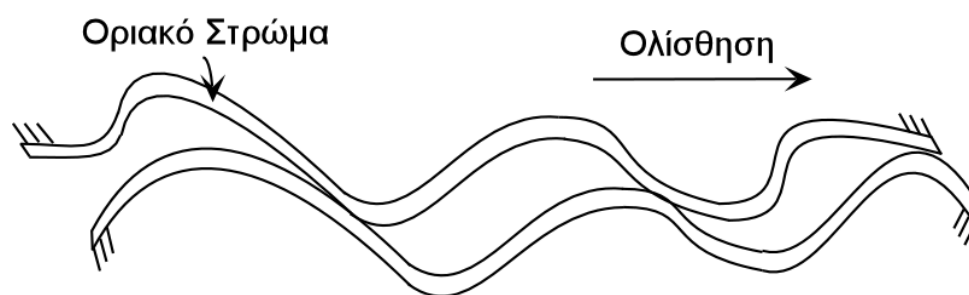
Συγκεκριμένα, στην γενικευμένη καμπύλη Stribeck διακρίνονται τρεις διαφορετικές περιοχές της τριβής ολίσθησης, οι οποίες είναι οι εξής:

1. Η περιοχή της οριακής λίπανσης (boundary lubrication)
2. Η περιοχή της μερικώς υγρής λίπανσης (partial fluid lubrication)
3. Η περιοχή της πλήρως υγρής λίπανσης (full fluid lubrication)

Κάθε μία από τις τρεις παραπάνω χαρακτηριστικές περιοχές της τριβής ολίσθησης αναπτύσσεται μέσα σε καθορισμένα όρια της σχετικής ταχύτητας, όπως φαίνεται και στο Σχ. 2-3, πράγμα που σημαίνει ότι η προηγούμενη διάκριση έχει νόημα μόνο στην περίπτωση που η σχετική ταχύτητα έχει σταθεροποιηθεί σε μία τιμή. Γι' αυτό το λόγο οι τρεις περιοχές της τριβής ολίσθησης καθορίζουν τα χαρακτηριστικά της ευσταθούς κατάστασής της.

2.2.1 Η περιοχή της οριακής λίπανσης (boundary lubrication)

Η περιοχή της οριακής λίπανσης διακρίνεται από την πολύ μικρή ταχύτητα ολίσθησης. Σ' αυτήν, η υγρή λίπανση (fluid lubrication) δεν είναι σημαντική, και γι' αυτό η ταχύτητα δεν επαρκεί για να δημιουργήσει ένα στρώμα υγρού λιπαντικού (fluid film) μεταξύ των τριβόμενων επιφανειών. Αντιθέτως υπάρχει ένα οριακό στρώμα λιπαντικού (boundary layer), το οποίο εξυπηρετεί στο να παρέχει λίπανση. Το οριακό στρώμα πρέπει να είναι στερεό έτσι ώστε να μπορεί να συντηρείται κάτω από την πίεση επαφής, αλλά μικρής διατμητικής αντοχής, έτσι ώστε να μειώσει την τριβή, βλ. [27]. Στο Σχ. 2-4 φαίνεται η ολίσθηση στο οριακό στρώμα.

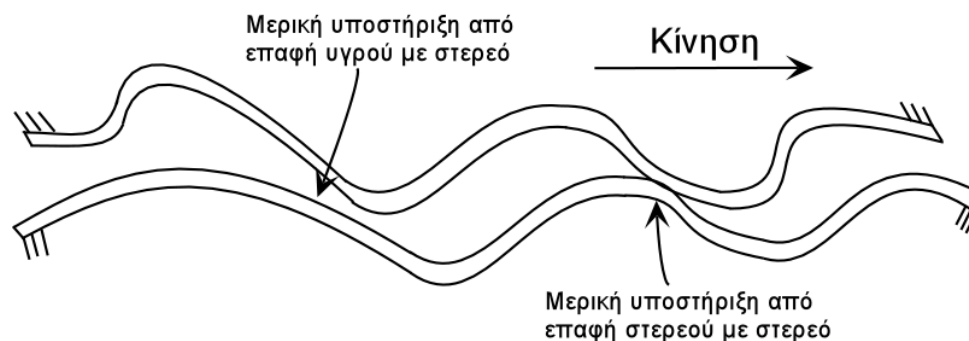


Σχήμα 2-4. Οριακή λίπανση.

Επειδή υπάρχει επαφή στερεού με στερεό, το οριακό στρώμα της λίπανσης καταπονείται με διάτμηση. Έχοντας, όμως, επιφάνεια στερεού που καταπονείται με διάτμηση συνήθως θεωρείται ότι η τριβή στο οριακό αυτό στρώμα είναι μεγαλύτερη από την υγρή λίπανση, που δημιουργείται σε υψηλότερες ταχύτητες. Αυτό, όμως, δεν είναι πάντοτε το ζητούμενο. Δεν είναι αναγκαίο η διατμητική αντοχή να είναι μεγαλύτερη από τις δυνάμεις ιξώδους ενός ρευστού.

2.2.2 Η περιοχή της μερικώς υγρής λίπανσης (partial fluid lubrication)

Στο Σχ. 2-5 φαίνεται η περιοχή της μερικώς υγρής λίπανσης, στην οποία έχει εισέλθει λιπαντικό στην ζώνη επαφής. Η μετακίνηση αυτή γίνεται μέσω της κίνησης, είτε πρόκειται για ολίσθηση είτε για περιστροφή. Ορισμένο λιπαντικό αποβάλλεται από το φορτίο, αλλά το ιξώδες εμποδίζει όλο το λιπαντικό να διαφύγει, οπότε δημιουργείται ένα στρώμα λιπαντικού.



Σχήμα 2-5. Μερικώς υγρή λίπανση.

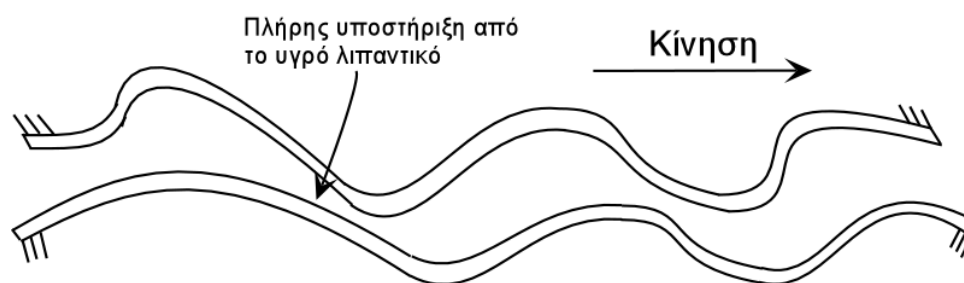
Είναι φανερό ότι η διαδικασία της εισχώρησης του λιπαντικού κυριαρχείται από την αλληλεπίδραση του ιξώδους του λιπαντικού, της ταχύτητας της κίνησης και της γεωμετρίας της επαφής. Όσο μεγαλύτερο είναι το ιξώδες ή η ταχύτητα της κίνησης, τόσο παχύτερο θα είναι το στρώμα του υγρού λιπαντικού. Όταν το στρώμα δεν είναι παχύτερο από το ύψος των προεξοχών, θα υπάρχει μερική επαφή στερεού με στερεό και επομένως θα αναπτύσσεται **μερικώς υγρή λίπανση** (partial fluid lubrication). Όταν το στρώμα είναι αρκετά παχύ τότε, ο διαχωρισμός είναι ολοκληρωτικός και το φορτίο είναι πλήρως υποστηριζόμενο από το υγρό λιπαντικό. Στην τελευταία περίπτωση έχει αναπτυχθεί **πλήρως υγρή λίπανση** που είναι και η ακριβώς επόμενη περιοχή της ευσταθούς κίνησης.

Η δυναμική της μερικώς υγρής λίπανσης μπορεί ίσως να εξηγηθεί σε αναλογία με έναν σκίερ στο νερό. Όταν η ταχύτητα είναι μηδενική ο σκίερ στηρίζεται ελαφρά στο νερό. Πάνω από μία κρίσιμη ταχύτητα ο σκίερ θα στηρίζεται δυναμικά από την κίνησή του. Μεταξύ του να επιπλέει και να κάνει σκι υπάρχει ένα μεγάλο εύρος ταχυτήτων μέσα στο οποίο ο σκίερ στηρίζεται μερικώς υδροδυναμικά. Αυτές οι ταχύτητες είναι ανάλογες με την περιοχή της μερικώς υγρής λίπανσης. Η αναλογία είναι ατελής στο ότι η ελαφριά στήριξη δεν είναι ακριβώς επαφή στερεού με στερεό, και η δυναμική στήριξη του σκίερ είναι λόγω της αδράνειας του ρευστού καθώς αντιτίθεται στο ιξώδες, που αποτελεί την κυριαρχούσα δύναμη στην λίπανση. Υπό μια έννοια, όμως, η αναλογία ισχύει: και για τον σκίερ και για την μηχανή, η περιοχή της μερικώς δυναμικής στήριξης είναι έκδηλα ασταθής. Καθώς ο σκίερ ανεβαίνει λόγω της αυξανόμενης ταχύτητάς του, το φορτίο του μειώνεται, επιτρέποντάς του να κινηθεί ακόμα πιο γρήγορα. Καθώς η μερικώς υγρή λίπανση αυξάνεται, η επαφή στερεού με στερεό μειώνεται, μειώνοντας έτσι την τριβή και αυξάνοντας την επιτάχυνση του κινούμενου μέρους.

2.2.3 Η περιοχή της πλήρως υγρής λίπανσης (full fluid lubrication)

Στην περιοχή της πλήρως υγρής λίπανσης το λιπαντικό, που έχει εισέλθει στην ζώνη επαφής, έχει δημιουργήσει ένα αρκετά παχύ στρώμα, λόγω της αρκετά μεγάλης σχετικής ταχύτητας των δύο τριβόμενων επιφανειών, με αποτέλεσμα ο διαχωρισμός τους να είναι ολοκληρωτικός και το φορτίο να υποστηρίζεται πλήρως από το υγρό στρώμα λιπαντικού.

Η πλήρως υγρή λίπανση μπορεί να έχει δύο μορφές ανάλογα με την γεωμετρία των δύο τριβόμενων επιφανειών. Ειδικότερα, υπάρχει η υδροδυναμική λίπανση και η ελαστο-υδροδυναμική λίπανση (E.H.L.). Η υδροδυναμική λίπανση εκδηλώνεται στις σύμφωνες επαφές, ενώ η ελαστο-υδροδυναμική λίπανση στις μη σύμφωνες επαφές. Όπως δείχνει το Σχ. 2-6 στην περιοχή αυτή δεν υπάρχει επαφή στερεού με στερεό. Γενικά, η ελαστο-υδροδυναμική λίπανση θα δώσει μεγαλύτερη τριβή και φθορά σε σύγκριση με την υδροδυναμική λίπανση.



Σχήμα 2-6. Πλήρως υγρή λίπανση.

2.3. Η περιοχή κίνησης με μεταβαλλόμενη ταχύτητα

Μέχρι τώρα αναλύθηκαν οι περιοχές της τριβής όπου η σχετική ταχύτητα των δύο τριβόμενων επιφανειών είναι σταθερή. Ωστόσο, υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις στις οποίες παρατηρείται μία συνεχής μεταβολή της ταχύτητας, γεγονός που είναι υπεύθυνο για μία σειρά νέων φαινομένων στην συμπεριφορά της τριβής.

Ειδικότερα, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση της συνεχούς μετάβασης από την προσκόλληση στην ολίσθηση και αντιστρόφως. Η κίνηση αυτή, που είναι γνωστή ως “stick-slip” (S.S.) οφείλεται κυρίως στην αδυναμία ανάπτυξης μιας αρκετά ικανοποιητικής σχετικής ταχύτητας μεταξύ των δύο τριβόμενων επιφανειών ώστε να υπάρξει ευσταθής κίνηση του σώματος που ολισθαίνει.

Η κίνηση S.S. έγινε γνωστή σε μελέτες κινήσεων πολύ μικρής ταχύτητας, στις οποίες υπήρχε μία συνεχής μετάβαση από την προσκόλληση στην ολίσθηση και αντιστρόφως. Χρησιμοποιώντας ένα ευαίσθητο όργανο μέτρησης της μετατόπισης, φωτομικρογράφους (photomicrographs) των τριβόμενων επιφανειών και υδραυλικά παραγόμενη μόνιμη κίνηση, οι Bowden-Leben (1939), βλ. [26], έδειξαν ότι συμβαίνει η

προσκόλληση και χρησιμοποίησαν τον όρο “stick-slip”. Παρατήρησαν τήξη στους φωτομικρογράφους και χρησιμοποιώντας το φαινόμενο του θερμοστοιχείου μεταξύ ανόμοιων μετάλλων, μέτρησαν μεγάλους εύρους θερμοκρασιακές μεταπτώσεις οι οποίες σχετίζονταν με τον κύκλο προσκόλλησης. Οι Bowden-Leben θεώρησαν την τοπική τήξη του ενός τριβόμενου μετάλλου σαν τον μηχανισμό της μείωσης της τριβής κατά την ολίσθηση. Βρήκαν, επίσης, ότι μία παρόμοια κίνηση S.S. συμβαίνει σε πολλά λιπανόμενα συστήματα, ακόμα και αν δεν υπάρχει τοπική τήξη, και ότι δεν συμβαίνει κίνηση S.S. όταν χρησιμοποιούνται σαν λιπαντικά μεγάλου μήκους αλυσίδας οξέα.

Πολλά διαφορετικά φαινόμενα και χαρακτηριστικά συνθέτουν αυτήν την συνεχή μετάβαση από την ακινησία στην κίνηση. Ειδικότερα, θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη σημασία στα εξής:

- Το φαινόμενο “Stribeck,”
- Η εξάρτηση του επιπέδου της τριβής αποδέσμευσης από τον ρυθμό εφαρμογής της εξωτερικής δύναμης,
- Η εξάρτηση του επιπέδου της τριβής αποδέσμευσης από τον χρόνο που ξοδεύεται στην στατική περιοχή (rising static friction – R.S.F.),
- Η χρονική καθυστέρηση μεταξύ μιας αλλαγής στην ταχύτητα και της αντίστοιχης αλλαγής στην τριβή (τριβώδης μνήμη ή τριβώδης καθυστέρηση).

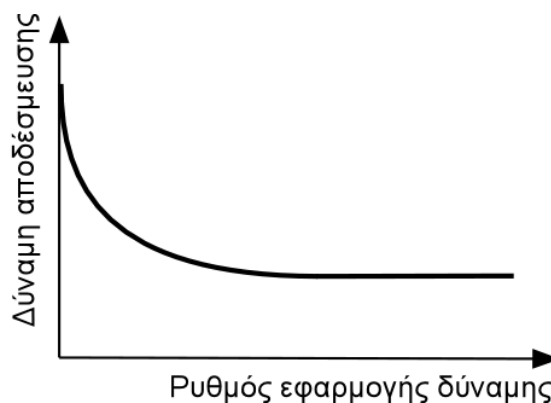
2.3.1 Το φαινόμενο Stribeck

Η συνεχής και απότομη μεταβολή της δύναμης της τριβής δεν κυριαρχεί μόνο κατά την φάση της προσκόλλησης, όπου η δύναμη τριβής αυξάνει μέχρι να ξεφύγει το σώμα από την στασιμότητα, αλλά και κατά την φάση της ολίσθησης όπου η δύναμη τριβής ελαττώνεται απότομα από την στατική τριβή στην τριβή ολίσθησης (η στατική τριβή είναι συνήθως μεγαλύτερη από την τριβή ολίσθησης). Συγκεκριμένα, το φαινόμενο “Stribeck” οφείλεται στην είσοδο υγρού λιπαντικού στην ζώνη επαφής, δηλαδή στην μετάβαση από την στατική περιοχή στην περιοχή της μερικώς υγρής λίπανσης.

Με άλλα λόγια, ενώ κατά την διάρκεια της στατικής περιοχής το επαπτομενικό στην επιφάνεια επαφής φορτίο στηριζόταν στις μικροεσοχές της επιφάνειας (επαφή στερεού με στερεό), ξαφνικά η στήριξη αυτή χάνεται και το φορτίο στηρίζεται μερικώς από ένα στρώμα λιπαντικού. Αυτό έχει ως άμεσο αποτέλεσμα την μείωση της δύναμης της τριβής, όπως φαίνεται στο Σχ. 2-3.

2.3.2 Η εξάρτηση του επιπέδου της τριβής αποδέσμευσης από τον ρυθμό εφαρμογής της εξωτερικής δύναμης

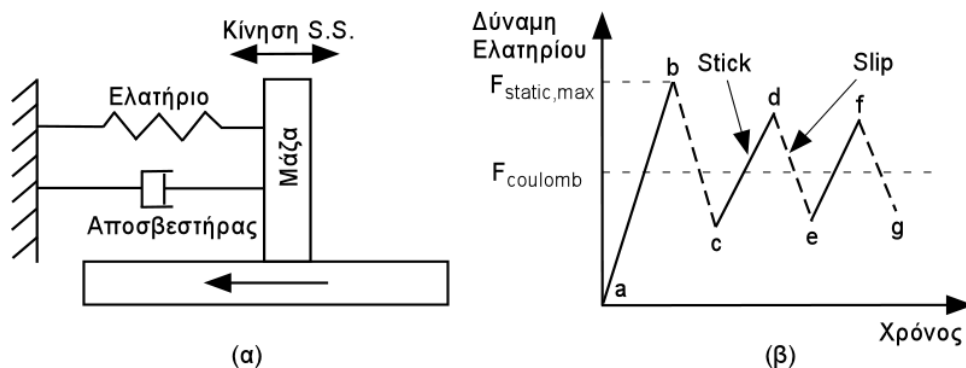
Ο Johannes βρήκε πειραματικά ότι η δύναμη αποδέσμευσης εξαρτάται από τον ρυθμό αύξησης της εξωτερικής δύναμης, βλ. [60]. Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώθηκε από τους Richardson–Nolle, βλ. [83]. Μία χαρακτηριστική μεταβολή της δύναμης αποδέσμευσης με τον ρυθμό εφαρμογής της εξωτερικής δύναμης φαίνεται στο Σχ. 2-7.



Σχήμα 2-7. Χαρακτηριστική σχέση μεταξύ του ρυθμού εφαρμογής δύναμης και της δύναμης αποδέσμευσης.

2.3.3 Η εξάρτηση του επιπέδου της τριβής αποδέσμευσης από τον χρόνο που ξοδεύεται στην στατική περιοχή (rising static friction – R.S.F.)

Ο Rabinowicz, βλ. [79], παρατήρησε ότι κατά την S.S. κίνηση το επίπεδο της στατικής τριβής εξαρτάται από τον χρόνο που ξοδεύτηκε στην στατική περιοχή. Ειδικότερα, ας θεωρηθεί το σύστημα του Σχ. 2-8(α), το οποίο υπό ορισμένες συνθήκες μπορεί να παρουσιάσει κίνηση S.S. Η δύναμη του ελατηρίου (δράση ελέγχου) καταγράφεται κατά την διάρκεια της κίνησης και δίνεται στο Σχ. 2-8(β).



Σχήμα 2-8. (α) Μηχανή τριβής, (β) η τριβή του ελατηρίου κατά την κίνηση S.S.

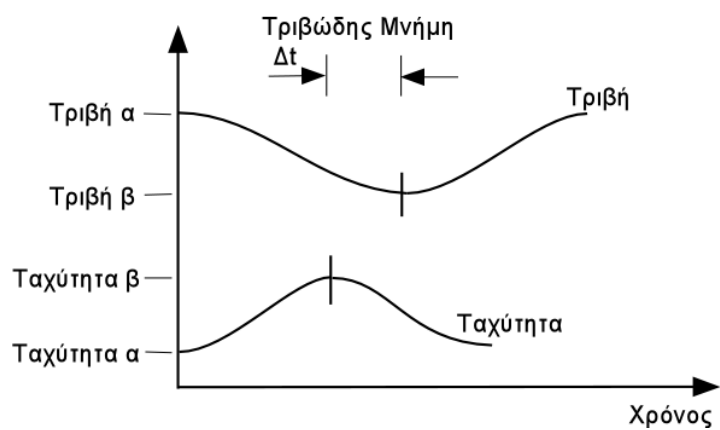
Κατά την προσκόλληση στο διάστημα a-b, η δύναμη αυξάνει. Στο σημείο b η δύναμη του ελατηρίου παίρνει την μέγιστη τιμή, που είναι το επίπεδο της δύναμης αποδέσμευσης όταν το σύστημα βρισκόταν σε ακινησία για αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα, και η ολίσθηση ξεκινά. Στο διάστημα b-c αναπτύσσεται ολίσθηση. Σε κάποιο σημείο, το σώμα θα σταματήσει και η δύναμη του ελατηρίου αρχίζει και πάλι να αυξάνεται, εισάγοντας μία ευσταθή κίνηση S.S. των σημείων c-d-e. Το σημείο d βρίσκεται κάπως χαμηλότερα από το b επειδή το σύστημα βρισκόταν σε ακινησία μόνο κατά το χρονικό διάστημα c-d.

Παρ' όλα αυτά, κίνηση μεταβαλλόμενης ταχύτητας δεν παρατηρείται μόνο κατά την μετάβαση από την κίνηση στην ακινησία και αντιστρόφως, αλλά και στην περίπτωση όπου έχει αποκατασταθεί μία αρκετά μεγάλη ταχύτητα, χωρίς να είναι δυνατή η μετάβαση στην ακινησία. Τότε η κίνηση χαρακτηρίζεται από το φαινόμενο της «τριβώδους μνήμης» (frictional memory) ή «της τριβώδους καθυστέρησης» (frictional lag).

2.3.4 Τριβώδης μνήμη ή τριβώδης καθυστέρηση (frictional memory or frictional lag)

Το δυναμικό αυτό φαινόμενο εκφράζει την χρονική καθυστέρηση μεταξύ μιας αλλαγής στην ταχύτητα και της αντίστοιχης αλλαγής στην δύναμη τριβής, βλ. Σχ. 2-9. Οι Hess-Soom, βλ. [56], είχαν πραγματοποιήσει πειράματα εφαρμόζοντας περιοδική, χρονικά μεταβαλλόμενη ταχύτητα, η οποία υπερτίθεται πάνω από μία σταθερή τιμή ταχύτητας έτσι ώστε η κίνηση να είναι μιας κατεύθυνσης. Μ' αυτόν τον τρόπο παρατηρήθηκε το φαινόμενο της υστέρησης καθώς η ταχύτητα μεταβάλλεται. Μάλιστα, το μέγεθος του βρόχου υστέρησης αυξάνεται με το κάθετο φορτίο, το ιξώδες και την συχνότητα της μεταβολής της ταχύτητας.

Επιστρέφοντας στην εικόνα της υδροδυναμικής λίπανσης σαν έναν σκιέρ του νερού με μερική δυναμική υποστήριξη, αν φανταστούμε τον σκιέρ να είναι ο μισός πάνω από το νερό, το φορτίο του θα είναι μία φθίνουσα συνάρτηση της ταχύτητας. Αν ξαφνικά η βάρκα αυξήσει την ταχύτητά της τότε το φορτίο του σκιέρ θα μειωθεί, *όμως μερικές φορές θα περάσει λίγος χρόνος πριν παρατηρηθεί το νέο φορτίο σταθεράς κατάστασης*. Αποδείξεις για την ύπαρξη της τριβώδους μνήμης είναι διαθέσιμες από ένα μεγάλο εύρος πειραματικών πηγών, βλ. [56], [79], [82], [85].



Σχήμα 2-9. Το φαινόμενο της τριβώδους μνήμης.

3 Μοντέλα τριβής

Τα μοντέλα τριβής που έχουν χρησιμοποιηθεί μέχρι σήμερα διαφέρουν κυρίως ως προς τις περιοχές και τα φαινόμενα της τριβής τα οποία μοντελοποιούν. Ειδικότερα, με βάση αυτό το κριτήριο τα μοντέλα τριβής θα μπορούσαν να διακριθούν σε τρεις διαφορετικές κατηγορίες:

- Κινητικά μοντέλα τριβής (Kinetic Friction Models-K.F.M.)
- Μοντέλα τριβής χρονικής εξάρτησης (Time-Dependent Friction Models-T.D.F.M.)
- Μοντέλα τριβής μεταβλητών κατάστασης (State-Variable Friction Models-S.V.F.M.)

3.1 Κινητικά μοντέλα τριβής (K.F.M.)

Τα κινητικά μοντέλα τριβής θα μπορούσαν να ονομαστούν «στατικά μοντέλα τριβής» ή διαφορετικά «μοντέλα τριβής ευσταθούς κατάστασης» διότι μοντελοποιούν την τριβή ως συνάρτηση μόνο της σχετικής ταχύτητας των δύο τριβόμενων επιφανειών. Αυτό σημαίνει ότι αγνοούν τα δυναμικά φαινόμενα της τριβής, δηλαδή εκείνα που λαμβάνουν χώρα όταν η ταχύτητα είναι μηδέν (στατική περιοχή της τριβής), ή όταν η κίνηση ταλαντεύεται συνεχώς ανάμεσα στην προσκόλληση και στην ολίσθηση (stick-slip).

Το γεγονός αυτό αποτελεί ένα πολύ σημαντικό μειονέκτημα των κινητικών μοντέλων τριβής έναντι των υπολοίπων δύο κατηγοριών, διότι δεν επιτυγχάνουν την ακριβή περιγραφή όλων των φαινομένων της τριβής. Απ' την άλλη μεριά, όμως, διακρίνονται για την απλότητά τους, ιδιότητα που σε ορισμένες εφαρμογές θα μπορούσε να καταστεί πολύ χρήσιμη.

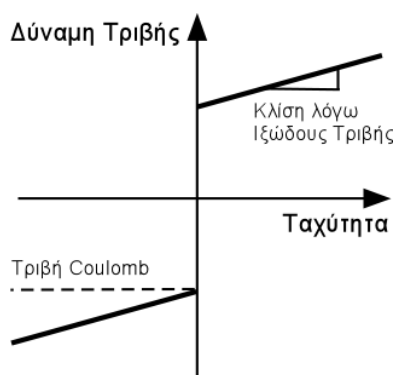
Ορισμένοι από τους χαρακτηριστικούς εκπροσώπους αυτής της κατηγορίας μοντέλων τριβής είναι οι ακόλουθοι:

- Το κλασσικό μοντέλο τριβής
- Το γενικό κινητικό μοντέλο τριβής
- Το μοντέλο Karnopp

3.1.1 Το κλασσικό μοντέλο τριβής

Το κλασσικό μοντέλο τριβής, σύμφωνα με το οποίο η τριβή είναι ανάλογη του κάθετου φορτίου, αντιτίθεται στην κίνηση, και είναι ανεξάρτητη της επιφάνειας επαφής, είχε γίνει

αντιληπτό από τον Leonardo Da Vinci, βλ. [42], στα τέλη του 15^{ου} και στις αρχές του 16^{ου} αιώνα, άλλα παρέμενε κρυμμένο στις σημειώσεις του για αιώνες. Το μοντέλο τριβής του Da Vinci επανεξετάστηκε το 1699 από τον Amontons, βλ. [11], και αναπτύχθηκε το 1785 από τον Coulomb, βλ. [38]. Ο ισχυρισμός του Amontons ότι η τριβή είναι ανεξάρτητη από τη επιφάνεια επαφής (τον δεύτερο νόμο του Da Vinci), αρχικά αντιμετωπίστηκε αρκετά επιφυλακτικά, αλλά σύντομα επιβεβαιώθηκε. Τέλος, το 1866 ο Reynolds, βλ. [81], εισήγαγε την εξίσωση της ιξώδους ροής ρευστού, συμπληρώνοντας έτσι το μοντέλο τριβής που είναι το πιο συχνά χρησιμοποιούμενο στην μηχανική, Σχ. 3-1.



Σχήμα 3-1. Μοντέλο τριβής: Coulomb+ιξώδους τριβή.

Το κλασσικό μοντέλο τριβής, Coulomb+ιξώδους τριβή, περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$F_f = F_c \cdot \text{sgn}(v) + b \cdot v \quad (3-1)$$

με:

$$\text{sgn}(v) = \begin{cases} +1, \forall v > 0 \\ 0, \alpha \nu v = 0 \\ -1, \forall v < 0 \end{cases} \quad (3-2)$$

όπου:

F_c η τριβή Coulomb, που είναι ανάλογη της κάθετης δύναμης, F_N , π.χ. $F_c = \mu \cdot F_N$,
όπου μ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης,

b ο συντελεστής ιξώδους τριβής,

v η σχετική ταχύτητα μεταξύ δύο τριβόμενων επιφανειών.

Η σημασία της συνάρτησης sgn είναι ο διαχωρισμός των τριών διαφορετικών μοντέλων που αντιστοιχούν στην αρνητική ταχύτητα, στην μηδενική ταχύτητα και στην θετική ταχύτητα.

Καλύτερη εφαρμογή στα πειραματικά δεδομένα μπορεί συχνά να επιτευχθεί από μία γραμμική εξάρτηση της ταχύτητας, για παράδειγμα:

$$F_f = b \cdot |v|^{\delta_v} \cdot \text{sgn}(v) \quad (3-3)$$

όπου δ_v μία παράμετρος που εξαρτάται από την γεωμετρία της εφαρμογής, βλ. [12], [90].

Είναι φανερό, όμως, ότι η τριβή κατά τη ακινησία δεν μπορεί να περιγραφεί ως συνάρτηση μόνο της ταχύτητας. Το 1833 ο Morin, βλ. [71], ήταν εκείνος που εισήγαγε την ιδέα της στατικής τριβής, δηλαδή της δύναμης της τριβής πριν το κινούμενο σώμα εισέλθει στην περιοχή της ολίσθησης. Όπως είναι γνωστό η στατική τριβή αντιδρά στις εξωτερικές δυνάμεις, κάτω από ένα συγκεκριμένο επίπεδο, και έτσι διατηρεί ένα σώμα μακριά από την κίνηση. Με αυτόν τον τρόπο συμπληρώθηκε το κλασσικό μοντέλο τριβής, που αποτελείται από την στατική+Coulomb+ξωδης τριβή, βλ. [71], [81].

Σύμφωνα μ' αυτό, η τριβή κατά την ακινησία μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν συνάρτηση της εξωτερικής δύναμης, σύμφωνα με την εξίσωση:

$$F_{stick} = \begin{cases} F_e, & \alpha \nu \quad |F_e| < F_s, \quad v = 0 \\ F_s \cdot \text{sgn}(F_e), & \alpha \nu \quad |F_e| > F_s, \quad v = 0 \end{cases} \quad (3-4)$$

όπου:

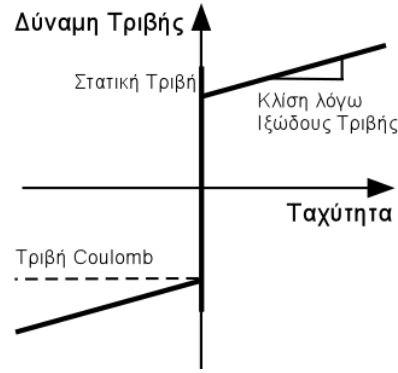
F_{stick} η δύναμη τριβής κατά την προσκόλληση, που περιγράφεται με τον γενικότερο όρο «στατική τριβή»,

F_s η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής ή η δύναμη αποδέσμευσης (break-away force),

F_e η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων.

Επομένως, ο παραδοσιακός τρόπος έκφρασης της τριβής σε ένα δομικό διάγραμμα με είσοδο την ταχύτητα και έξοδο την δύναμη δεν είναι απολύτως σωστός. Η στατική τριβή πρέπει να εκφραστεί σαν μια πολυμεταβλητή συνάρτηση η οποία μπορεί να πάρει μια οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των δύο ακραίων τιμών F_s , $-F_s$.

Τα προηγουμένως αναφερθέντα κλασσικά συστατικά της τριβής μπορούν να συνδυαστούν με διαφορετικούς τρόπους, βλ. Σχ. 3-2, και οποιοσδήποτε τέτοιος συνδυασμός αναφέρεται ως κλασσικό μοντέλο τριβής. Αυτά τα μοντέλα έχουν συστατικά τα οποία είναι είτε γραμμικά με την ταχύτητα είτε σταθερά.



Σχήμα 3-2. Μοντέλο τριβής: στατική+Coulomb+ιξώδης τριβή.

3.1.2 Το γενικό κινητικό μοντέλο τριβής

Ο Stribeck, βλ. [91], παρατήρησε ότι η δύναμη τριβής δεν μειώνεται ασυνεχώς, όπως φαίνεται στο Σχ. 3-2, αλλά ότι η εξάρτηση από την ταχύτητα είναι συνεχής. Η καμπύλη της συνεχούς μεταβολής της τριβής ως προς την ταχύτητα ονομάζεται τριβή Stribeck και γενικά περιγράφεται από την εξίσωση:

$$F_f = \begin{cases} F_f(v) , & \alpha \nu \quad v \neq 0 \\ F_e , & \alpha \nu \quad v = 0, \quad |F_e| < F_s \\ F_s \cdot \text{sgn}(F_e) , & \alpha \nu \quad v = 0, \quad \dot{v} = 0, \quad |F_e| > F_s \end{cases} \quad (3-5)$$

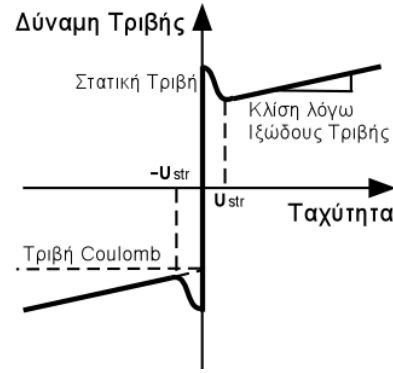
η οποία ισοδύναμα μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$F_f = F_f(v) + [1 - |\text{sgn}(v)|] \cdot \text{sat}(F_e, F_s) \quad (3-6)$$

με:

$$\text{sat}(x, M) = \begin{cases} M , & \alpha \nu \quad x > M \\ x , & \alpha \nu \quad -M \leq x \leq M \\ -M , & \alpha \nu \quad x < -M \end{cases} \quad (3-8)$$

Η συνάρτηση $F_f(v)$ αποτελείται από δύο κομμάτια, ανάλογα με το αν η ταχύτητα είναι θετική ή αρνητική, και μπορεί να έχει την μορφή που εμφανίζεται στο Σχ. 3-3:



Σχήμα 3-3. Γενικό κινητικό μοντέλο τριβής.

Ένας αριθμός παραμετροποιήσεων της $F_f(v)$ έχει προταθεί, βλ. [13]. Μία συνήθης μορφή της μη γραμμικότητας, είναι:

$$F_f(v) = F_c + (F_s - F_c) \exp\left(-|v/v_{str}|^{\delta_v}\right) + bv \quad (3-9)$$

όπου v_{str} είναι η ταχύτητα Stribeck, ενώ μία γενικότερη μορφή θα μπορούσε να είναι η εξής, βλ. [7]:

$$F_f(v) = bv + \sigma_0 g(v) \operatorname{sgn}(v) \quad (3-10)$$

με:

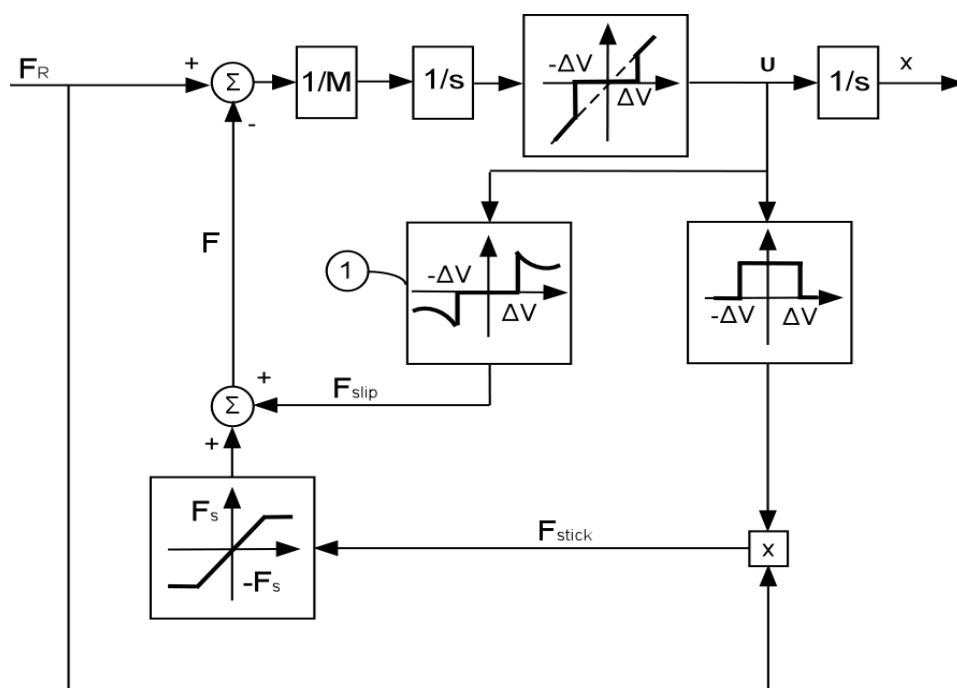
$$\sigma_0 g(v) = F_s \exp(-v^2/v_{str}^2) + F_c (1 - \exp(-v^2/v_{str}^2)) \quad (3-11)$$

3.1.3 Το μοντέλο Karnopp

Το βασικό μειονέκτημα των κινητικών μοντέλων τριβής όταν χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις προσομοιώσεων και ελέγχου, είναι το πρόβλημα του εντοπισμού της μηδενικής ταχύτητας, γεγονός που τους στερεί την αξιοπιστία στην περιοχή αυτή λειτουργίας.

Μία λύση στο πρόβλημα αυτό βρέθηκε από τον Karnopp, βλ. [61]. Ανέπτυξε ένα μοντέλο προκειμένου να υπερκεράσει τα προβλήματα εντοπισμού της μηδενικής ταχύτητας και της αποφυγής της μετάβασης μεταξύ διαφορετικών εξισώσεων κατάστασης για την προσκόλληση και την ολίσθηση. Το μοντέλο καθορίζει ένα διάστημα στο οποίο η ταχύτητα μπορεί να θεωρηθεί μηδέν: $|v| < \Delta V$. Για ταχύτητες μέσα σ' αυτό το διάστημα η εσωτερική κατάσταση του συστήματος (η ταχύτητα) μπορεί να αλλάζει και να μην είναι μηδέν, αλλά η έξοδος του συστήματος διατηρείται στο μηδέν το οποίο μπορεί να επιτευχθεί με ένα στοιχείο νεκρής ζώνης (dead-zone). Η δύναμη τριβής, εξαρτώμενη ή όχι απ' το αν $|v| < \Delta V$, είναι είτε μία κορεσμένη έκδοση της εξωτερικής δύναμης είτε μία αυθαίρετη στατική συνάρτηση της ταχύτητας.

Ειδικότερα, για να υλοποιήσει την ιδέα του, ο Karnopp, χρησιμοποίησε το δομικό διάγραμμα που φαίνεται στο σχήμα:



Σχήμα 3-4. Το μοντέλο Karnopp ενός συστήματος 2^{ης} τάξης.

όπου:

M η μάζα του κινούμενου σώματος,

F_{slip} η δύναμη τριβής κατά την ολίσθηση,

F_{stick} η δύναμη τριβής κατά την προσκόλληση.

Σύμφωνα με το δομικό διάγραμμα του Σχ. 3-4 όταν η ταχύτητα είναι μεταξύ ενός μικρού εύρους $|v| < \Delta V$ το σύστημα κολλάει, και ενώ είναι προσκολλημένο η δύναμη τριβής ακυρώνει την δύναμη οδήγησης του συστήματος. Όταν η δύναμη οδήγησης ξεπεράσει την δύναμη αποδέσμευσης (που είναι ίση με την μέγιστη στατική τριβή) το σώμα επιταχύνει, και μετά από σύντομο χρόνο το μέγεθος της σχετικής ταχύτητας θα ξεπεράσει το όριο ΔV και το μοντέλο θα μεταπηδήσει από την προσκόλληση στην ολίσθηση. Εκείνη την στιγμή το φορτίο τριβής καθορίζεται από την αυθαίρετα καθορισμένη από τον χρήστη συνάρτηση στο “block 1” του Σχ. 3-4.

Ωστόσο, αν και η προσέγγιση του Karnopp είχε την απαραίτητη πιστότητα, είναι δύσκολο να ενσωματωθεί σε ένα μοντέλο προσομοίωσης επειδή απαιτεί την παραγωγή διαφορετικών συνόλων εξισώσεων για όλες τις πιθανές συνθήκες ολίσθησης και

προσκόλλησης και τον συνδυασμό των εξισώσεων αυτών σε ένα δομικό διάγραμμα με τέτοιο τρόπο ώστε ένα μόνο τμήμα των εξισώσεων να είναι ενεργό κάθε στιγμή. Επομένως, με την προσέγγιση του Karnopp η πολυπλοκότητα του μοντέλου τριβής αυξάνει καθώς αυξάνει η πολυπλοκότητα του δυναμικού συστήματος.

Για το σύστημα της μιας μάζας υπάρχουν μόνο δύο σύνολα εξισώσεων, ένα για την ολίσθηση της μάζας και ένα για την προσκόλληση. Για ένα πιο σύνθετο μοντέλο δύο μαζών με την μία μάζα να ολισθαίνει πάνω στην άλλη και με την τελευταία να ολισθαίνει πάνω στο δάπεδο, υπάρχουν τέσσερα τμήματα εξισώσεων. Στην περίπτωση ενός συστήματος τριών σωμάτων μπορεί να υπάρχουν πάνω από 8 σύνολα εξισώσεων. Ο αριθμός αυτός των συνόλων των εξισώσεων εξαρτάται από τις λεπτομέρειες της κάθε εφαρμογής ξεχωριστά. Γενικά, η πολυπλοκότητα του μοντέλου τριβής εξαρτάται από την πολυπλοκότητα του συστήματος.

3.2 Μοντέλα τριβής με χρονική εξάρτηση (T.D.F.M.)

Στην κατηγορία των μοντέλων τριβής με χρονική εξάρτηση κατατάσσονται όσα ενσωματώνουν ορισμένα από τα χαρακτηριστικά της κίνησης με μεταβαλλόμενη ταχύτητα, βλ. Παρ. 2-3. Ειδικότερα, σ' αυτήν την κατηγορία ανήκουν τα κάτωθι μοντέλα:

- Το μοντέλο τριβής των Hess-Soom (Hess-Soom Model-H.S.M.)
- Το μοντέλο τριβής του Armstrong ή μοντέλο των επτά παραμέτρων (Seven Parameter Model-S.P.M.)

3.2.1 Το μοντέλο των Hess-Soom (H.S.M.)

Το H.S.M., βλ. [56], αποτελεί ένα μοντέλο χρονικής εξάρτησης, διότι προσπαθεί να μοντελοποιήσει το φαινόμενο της τριβής μνήμης. Συγκεκριμένα, οι Hess-Soom κατέγραψαν την ανάδραση της δύναμης της τριβής σε μία γραμμή λιπαινόμενης επαφής, όταν επιβαλλόταν είσοδος ταλαντωτικής ταχύτητας σταθερού πρόσημου, χρησιμοποιώντας έλεγχο κλειστού βρόχου. Βρήκαν ότι καθώς η συχνότητα της ταλάντωσης αυξάνεται, τότε η καμπύλη τριβής-ταχύτητας γινόταν ένας κλειστός βρόχος γύρω από την καμπύλη τριβής ευσταθούς κατάστασης.

Η συμπεριφορά αυτή μοντελοποιήθηκε εισάγοντας μια απλή καθυστέρηση χρόνου στην εξίσωση ευσταθούς κατάστασης, δηλαδή:

$$F_f(t) = c_0 v(t-a) + \frac{c_1}{1+c_2 v^2(t-a)} \quad , \quad v > 0 \quad (3-12)$$

όπου:

a η χρονική καθυστέρηση,

c_0, c_1, c_2 θετικές σταθερές.

3.2.2 Το μοντέλο των επτά παραμέτρων (S.P.M.)

Αυτό το εμπειρικά υποκινούμενο μοντέλο τριβής S.P.M., βλ. [15], διατηρεί τα χαρακτηριστικά του κλασσικού μοντέλου, στο οποίο, όμως, έχουν προστεθεί τα χαρακτηριστικά της κίνησης με μεταβαλλόμενη ταχύτητα (φαινόμενο Stribeck, η μεταβολή της δύναμης αποδέσμευσης με τον χρόνο παραμονής στην στατική περιοχή και η τριβώδης μνήμη). Ακόμη μοντελοποιείται και η περιοχή της προ-ολίσθησης μετατόπισης στην οποία η δύναμη τριβής λαμβάνεται ανάλογη της προ-ολίσθησης μετατόπισης. Συγκεκριμένα το μοντέλο των επτά παραμέτρων περιγράφεται από τις εξισώσεις:

- Περιοχή της προ-ολίσθησης μετατόπισης:

$$F_f(x) = -K_t x \quad (3-13)$$

- Ολίσθηση (Coulomb+ιξώδης τριβή+καμπύλη Stribeck με τριβώδη μνήμη):

$$F_f(v, t) = - \left(F_c + bv + F_{str}(\gamma, t_r) \frac{1}{1 + \left(\frac{v(t - \tau_L)}{v_{str}} \right)^2} \right) \text{sgn}(v) \quad (3-14)$$

- Μεταβολή της προ-ολίσθησης μετατόπισης με τον χρόνο παραμονής στην στατική περιοχή (R.S.F.):

$$F_{str}(\gamma, t_r) = F_{str,a} + (F_{str,\infty} - F_{str,a}) \frac{t_r}{t_r + \gamma} \quad (3-15)$$

όπου:

F_{str} η τριβή Stribeck, που δίνεται από την εξίσωση $F_{str} = F_s - F_c$

$F_{str,a}$ η τριβή Stribeck στο τέλος της προηγούμενης περιόδου ολίσθησης,

$F_{str,\infty}$ η τριβή Stribeck μετά από μία μεγάλη περίοδο ακινησίας,

K_t ο συντελεστής εφασπτομενικής δυσκαμψίας της στατικής επαφής,

τ_L η σταθερά χρόνου της τριβώδους μνήμης,

γ ο χαρακτηριστικός χρόνος του φαινομένου R.S.F.,

t_r ο χρόνος στον οποίο το σώμα είναι ακινητοποιημένο,

Αν και τα μεγέθη των επτά παραμέτρων τριβής (F_c , b , $F_{str,\infty}$, K_t , ν , τ_L , γ) εξαρτώνται από την εφαρμογή και την λίπανση, μπορούν να δοθούν τυπικές τιμές. Στον Πίν. 3-1 δίνονται προσεγγιστικά εύροι γι' αυτές, όπως προέκυψαν στα [13], [51], [57], [58], [62], [77]. Τα μεγέθη της δύναμης τριβής, F_c , b και $F_{str,\infty}$ εκφράζονται σαν συνάρτηση της κάθετης δύναμης.

Πίνακας 3-1. Προσεγγιστικά εύροι τιμών για τις παραμέτρους του μοντέλου τριβής των επτά παραμέτρων.

	Εύρος τιμών παραμέτρων	Οι παράμετροι εξαρτώνται κυρίως από:
F_c	$0.001 - 0.1 F_N$	Ιξώδες λιπαντικού, γεωμετρία επαφής και φόρτιση
b	0 – πολύ μεγάλο	Ιξώδες λιπαντικού, γεωμετρία επαφής και φόρτιση
$F_{str,\infty}$	$0 - 0.1 F_N$	“Boundary lubrication”, F_c
K_t	$\frac{1}{\Delta_x}(F_{str} + F_c)$ $\Delta_x \cong 1 - 50[\mu\text{m}]$	Ιδιότητες του υλικού και το φινίρισμα της επιφάνειας
ν	$0.00001 - 0.1[\text{m/sec}]$	“Boundary lubrication”, ιξώδες του λιπαντικού, Ιδιότητες του υλικού και το φινίρισμα της επιφάνειας, Γεωμετρία επαφής και φόρτιση
τ_L	$1 - 50[\text{msec}]$	Ιξώδες λιπαντικού, γεωμετρία επαφής και φόρτιση
γ	$0 - 206[\text{sec}]$	“Boundary lubrication”

όπου Δ_x είναι η παραμόρφωση κατά την προσκόλληση.

Κάθε μια από τις επτά παραμέτρους του μοντέλου εκφράζει ένα διαφορετικό φαινόμενο τριβής. Οι επτά γραμμές του Πίν. 3-2 δείχνουν την επίδραση των φαινομένων αυτών στην συμπεριφορά της ολίσθησης.

Πίνακας 3-2. Δυνατότητες του μοντέλου των επτά παραμέτρων.

Μοντέλο τριβής	Προβλεπόμενη/παρατηρούμενη συμπεριφορά
Ιξώδης	Ευστάθεια σε όλες τις ταχύτητες και στις

	αντιστροφές της.
Τριβή Coulomb	Δεν εμφανίζει S.S. για PD έλεγχο, ούτε το φαινόμενο “hunting” για PID έλεγχο.
Στατική+Coulomb+Ιξώδης	Προβλέπει S.S. για συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες με PD έλεγχο. Προβλέπει το φαινόμενο “hunting” στον PID έλεγχο.
Καμπύλη “Stribeck”	Απαιτείται για να προβλέπει ακριβώς τις αρχικές συνθήκες που οδηγούν σε S.S.
Πτώση στατικής τριβής (R.S.F.)	Απαιτείται για να προβλέπει ακριβώς την αλληλεπίδραση της ταχύτητας με το πλάτος του S.S.
Τριβώδης μνήμη	Απαιτείται για να προβλέπει ακριβώς την αλληλεπίδραση της δυσκαμψίας με το πλάτος του S.S.
Προ-ολίσθησης μετατόπιση	Απαιτείται για να προβλέπει ακριβώς τις μικρές μετατοπίσεις κατά την προσκόλληση (περιλαμβάνει αντιστροφές της ταχύτητας).

Εναλλακτικά, ο προηγούμενος πίνακας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επιλογή ενός μοντέλου τριβής βασισμένο στις πειραματικές παρατηρήσεις.

3.3 Μοντέλα τριβής μεταβλητών κατάστασης (S.V.F.M.)

Τα K.F.M. και τα T.D.F.M. μοντέλα τριβής, τα οποία αναλύθηκαν στις παραγράφους (3.1, 3.2), ενσωματώνουν κατά κύριο λόγο τα παρατηρούμενα αποτελέσματα της τριβής, ενώ δεν λαμβάνουν υπόψη τον φυσικό μηχανισμό που επέφερε αυτά τα χαρακτηριστικά. Με άλλα λόγια, στα μοντέλα τριβής που αναφέρθηκαν μέχρι τώρα, δεν μοντελοποιείται η δυναμική του φυσικού φαινομένου, πράγμα το οποίο γίνεται στα μοντέλα τριβής μεταβλητών κατάστασης (S.V.F.M.).

Τα S.V.F.M. αναπτύχθηκαν από την κοινότητα της μηχανικής των τεκτονικών πλακών, βλ. [45], [52], [68], [75], [82], [84]. Ενδιαφέρον για την τριβή των πλακών πηγάζει από την υπόθεση ότι οι σεισμοί είναι φαινόμενα κίνησης S.S. Ενώ τα μοντέλα αυτά έχουν αναπτυχθεί για πειράματα για την τριβή σε πλάκες, οι ιδιότητές τους έχουν πρόσφατα παρατηρηθεί για ένα εύρος υλικών, βλ. [45], [48]. Σ' αυτά περιλαμβάνονται ο λιπαινόμενος χάλυβας, το teflon πάνω σε χάλυβα, γυαλί, πλαστικό και ξύλο. Μέχρι σήμερα, αυτά τα πειράματα έχουν περιοριστεί σε ταχύτητες στην περιοχή της οριακής λίπανσης (boundary lubrication).

Στην κατηγορία των μοντέλων S.V.F.M., ή διαφορετικά των μοντέλων εσωτερικών καταστάσεων, κατατάσσονται όσα ενσωματώνουν μία εξάρτηση από την ιστορία της

μετατόπισης. Για σταθερές κάθετες πιέσεις, το γενικό μοντέλο το οποίο περιλαμβάνει τις n μεταβλητές κατάστασης, θ_i , δίνεται από:

$$\begin{aligned} F_f(t) &= f(v, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \\ \dot{\theta}_i &= g_i(v, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \end{aligned} \quad (3-16)$$

Αυτή η μορφή υπαινίσσεται ότι μία ξαφνική αλλαγή στην ταχύτητα δεν μπορεί να παράγει μία ξαφνική αλλαγή στην κατάσταση, θ , αλλά επηρεάζει την χρονική της παράγωγο. Έτσι, το φαινόμενο κατά το οποίο μία ξαφνική αλλαγή στην ταχύτητα καταλήγει σε μία στιγμιαία αλλαγή στην δύναμη τριβής, στην ίδια κατεύθυνση (φαινόμενο της στιγμιαίας ταχύτητας), λαμβάνει χώρα με σταθερή κατάσταση. Η εξέλιξη των μεταβλητών κατάστασης ως απάντηση στις αλλαγές της ταχύτητας, μαζί με το φαινόμενο της στιγμιαίας ταχύτητας, συνθέτουν την δυναμική συμπεριφορά.

Οι μεταβλητές κατάστασης μπορεί να έχουν φυσική υπόσταση. Για παράδειγμα, έστω ένα μοντέλο ξηράς τριβής όπου η τάση της τριβής εξαρτάται από τη διατμητική τάση των μικρών προεξοχών της επιφάνειας. Για ένα σταθερό κάθετο φορτίο και μία μονοδιάστατη μεταβλητή κατάστασης, η μεταβλητή κατάστασης θα μπορούσε να είναι ο μέσος χρόνος ζωής των προεξοχών της επιφάνειας. Πρόσφατα, αυτά τα μοντέλα βελτιώθηκαν ώστε να περιλαμβάνουν την εξάρτηση και από το κάθετο φορτίο, βλ. [68].

Στην κατηγορία των μοντέλων S.V.F.M. ανήκει ένας μεγάλος αριθμός μοντέλων, τα οποία διαφέρουν κυρίως ως προς τον τρόπο μοντελοποίησης των μικρών μετατοπίσεων στην περιοχή της προ-ολίσθησης μετατόπισης. Εξάλλου, σ' αυτήν την περιοχή λειτουργίας ο μηχανισμός δημιουργίας της τριβής παίζει σημαντικό ρόλο, όσον αφορά την σχετική μετατόπιση των δύο τριβόμενων επιφανειών, σε αντίθεση με την περιοχή ολίσθησης στην οποία επικρατεί ο μηχανισμός της υδροδυναμικής λίπανσης. Για παράδειγμα, στην κατηγορία των S.V.F.M. ανήκουν μοντέλα τα οποία ενσωματώνουν την περιοχή της προ-ολίσθησης μετατόπισης με την μορφή ενός μη-γραμμικού ελατηρίου. Ενδεικτικά, σ' αυτήν την κατηγορία ανήκουν τα μοντέλα που περιγράφονται στην συνέχεια.

3.3.1 Το μοντέλο του Dahl (D.M.)

Το μοντέλο (D.M.) αναπτύχθηκε το 1968 από τον Dahl, βλ. [43]. Αφορμή για την δημιουργία του μοντέλου υπήρξε μία σειρά πειραμάτων πάνω στην τριβή σε σερβομηχανισμούς με ένσφαιρους τριβείς. Γι' αυτόν τον λόγο στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα για να προσομοιώνει συστήματα με τριβή ένσφαιρων τριβέων.

Ο Dahl ήταν ο πρώτος ο οποίος μελέτησε συστηματικά και μοντελοποίησε την προ-ολίσθησης μετατόπιση εκφράζοντας την καμπύλη δύναμης-μετατόπισης χρησιμοποιώντας μια διαφορική εξίσωση. Η διαφορική αυτή εξίσωση έχει ως

παραμέτρους τον συντελεστή δυσκαμψίας, K_i , και μία σταθερά, i , η οποία καθορίζει το σχήμα της καμπύλης δύναμης-μετατόπισης (συνήθως λαμβάνεται ίση με τη μονάδα). Ειδικότερα, η δύναμη τριβής είναι συνάρτηση της μετατόπισης και του προσήμου της ταχύτητας. Αυτό σημαίνει ότι η δύναμη τριβής εξαρτάται από την θέση, ενώ συνάμα είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα, πράγμα που αποτελεί μια πολύ σημαντική ιδιότητα του μοντέλου.

Η εξίσωση του D.M. είναι ουσιαστικά η εξίσωση ενός μη γραμμικού ελατηρίου, με γενικότερη μορφή την εξής:

$$\frac{dF_f}{dx} = K_i \cdot \left(1 - \frac{F_f}{F_c} \cdot \text{sgn}(v)\right)^i \cdot \text{sgn}\left(1 - \frac{F_f}{F_c} \cdot \text{sgn}(v)\right) \quad (3-17)$$

όπου K_i είναι η κλίση της καμπύλης δύναμης-μετατόπισης όταν $F_f = 0$.

Δεδομένου ότι η δύναμη τριβής που δίνει η Εξ. (3-17) δεν είναι συνάρτηση της ταχύτητας, συνεπάγεται ότι το μοντέλο δεν ενσωματώνει το φαινόμενο Stribeck το οποίο εξαρτάται αποκλειστικά από την ταχύτητα. Συγκεκριμένα, το φαινόμενο Stribeck είναι μόνο μεταβατικό, μετά από μία αναστροφή της ταχύτητας, και δεν εμφανίζεται στα μόνιμης κατάστασης χαρακτηριστικά της τριβής. Επίσης, από την Εξ. (3-17) φαίνεται ότι το D.M. δεν παράγει μία δύναμη στην στατική περιοχή η οποία να ξεπερνά την δύναμη ολίσθησης, δηλαδή την τριβή Coulomb. Μπορεί όμως, να τροποποιηθεί ώστε να συμβαίνει αυτό αλλάζοντας την τριβή Coulomb, F_c , από μία σταθερά σε μία συνάρτηση της ταχύτητας, $F_c(v)$.

Ακόμη, αν και μοντελοποιείται η στατική περιοχή, θεωρώντας την δύναμη τριβής σαν την δύναμη που προκύπτει από ένα μη γραμμικό ελατήριο, δεν ενσωματώνει όλα τα φαινόμενα τα οποία έχουν παρατηρηθεί ότι λαμβάνουν χώρα σ' αυτήν την περιοχή. Ειδικότερα, δεν λαμβάνονται υπόψη ούτε το φαινόμενο του ερπυσμού και της σκλήρυνσης του υλικού, που αφορούν την περιοχής της πλαστικής παραμόρφωσης, βλ. Παρ. 2.1.2.2.1, ούτε το φαινόμενο μνήμης της στατικής τριβής, που αφορά την περιοχή της παραμόρφωσης του μη γραμμικού ελατηρίου, βλ. Παρ. 2.1.2.2.2, αν και όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η εξίσωση του μοντέλου είναι η εξίσωση ενός μη γραμμικού ελατηρίου.

Όσον αφορά το τελευταίο, η διαφορά μεταξύ μοντέλου και πραγματικότητας διαπιστώνεται αν υποθεθεί ότι στην στατική περιοχή της τριβής λαμβάνει χώρα μία αντιστροφή της δύναμης. Τότε, από την Εξ. (3-17) φαίνεται ότι η δύναμη τριβής είναι μία συνάρτηση της απόστασης μετρούμενης από το σημείο αντιστροφής της δύναμης και της τιμής της δύναμης στο σημείο της αντιστροφής. Εξαιτίας, όμως, αυτού, το μοντέλο δεν παρουσιάζει την ειδική ιδιότητα της μνήμης των σημείων αντιστροφής. Ακριβέστερα, αν η

καμπύλη αντιστραφεί σε ένα σημείο με $F_f = F_1$, αυτό το σημείο δεν θα ξανακαλυφθεί αν η καμπύλη δεν αντιστραφεί πάλι στο σημείο $F_f = -F_1$, και χωρίς να έχουν γίνει άλλες αντιστροφές πριν την αντιστροφή αυτή. Αυτό το μειονέκτημα έχει, επίσης, παρατηρηθεί σε μία αριθμητική προσομοίωση των Osborne-Rittenhouse, βλ. [72]. Παρατήρησαν, επίσης, ότι η κλίση του μοντέλου του Dahl γίνεται επίπεδη τόσο γρήγορα που είναι δύσκολο να ταιριάζουν τα πειραματικά αποτελέσματα.

Εξαιτίας της προηγούμενης παράλειψης του μοντέλου D.M., όσο και των πιο πρόσφατων που βασίζονται σ' αυτό, παρουσιάζεται το φαινόμενο της στιβάδας, που σημαίνει ότι δεν συμπληρώνεται ο βρόχος υστέρησης όταν το κινούμενο σώμα υπόκειται σε τυχαίες μικρές δυνάμεις και τυχαίες μικρές δονήσεις, οπότε και καταλήγει σε διαφορετικό σημείο από το σημείο εκκίνησης. Όμως, το φαινόμενο της στιβάδας δεν εμφανίζεται ποτέ στην πραγματικότητα, διότι, για παράδειγμα, ποτέ τα σώματα που τοποθετούνται σε ένα κεκλιμένο επίπεδο και υπόκειται σε μικρές δονήσεις δεν έρπουν συνεχώς προς τα κάτω. Το φαινόμενο της στιβάδας είναι μείζονος σημασίας όταν πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα μοντέλο τριβής σε μηχανισμό ανάδρασης δύναμης (haptic interfaces), επειδή μικρές δονήσεις πηγάζουν από ακούσιες δονήσεις του χειριού. Λόγω αυτού του μειονεκτήματος έχουν γίνει προσπάθειες τροποποίησης του μοντέλου D.M., βλ. [54].

3.3.2 Το μοντέλο των Bliman-Sorine (B.S.M.)

Οι Bliman-Sorine ανέπτυξαν το 1991 μια οικογένεια από δυναμικά μοντέλα (B.S.M.) σε μία σειρά από άρθρα, βλ. [20], [21], [22], στηριζόμενοι κυρίως στις πειραματικές παρατηρήσεις του Rabinowicz, βλ. [78].

Στα μοντέλα B.S.M. το μέγεθος της τριβής εξαρτάται μόνο από το πρόσημο της ταχύτητας και την μεταβλητή διαστήματος, που καθορίζεται από:

$$s = \int_0^t |\dot{v}(\tau)| d\tau \quad (3-18)$$

Επομένως, στα μοντέλα B.S.M., η τριβή είναι συνάρτηση της διαδρομής. Δεν εξαρτάται από το πόσο γρήγορα το σύστημα κινείται κατά μήκος της διαδρομής. Τα μοντέλα εκφράζονται σαν γραμμικά συστήματα ως προς την μεταβλητή διαστήματος s .

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{ds} &= A \cdot x_s + B \cdot \text{sgn}(\dot{v}) \\ F_f &= C \cdot x_s \end{aligned} \quad (3-19)$$

Οι Bliman-Sorine δημιούργησαν μοντέλα διαφορετικής πολυπλοκότητας. Το μοντέλο 1^{ης} τάξης δίνεται για:

$$A = -\frac{1}{\varepsilon_f}, B = \frac{f_1}{\varepsilon_f}, C = 1 \quad (3-20)$$

όπου ε_f , f_1 σταθερές.

Το μοντέλο 1^{ης} τάξης μπορεί να γραφτεί ως:

$$\frac{dF_f}{dt} = \frac{dF_f}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = |v| \cdot \frac{dF_f}{ds} = \frac{f_1}{\varepsilon_f} \left(v - |v| \frac{F_f}{f_1} \right) \quad (3-21)$$

το οποίο είναι ταυτόσημο με το μοντέλο του Dahl, για $F_c = f_1$, $\sigma = \frac{f_1}{\varepsilon_f}$, $\alpha = 1$. Οι

Bliman-Sorine έδειξαν επίσης ότι, καθώς το ε_f πηγαίνει στο μηδέν, το μοντέλο 1^{ης} τάξης συμπεριφέρεται σαν ένα κλασσικό μοντέλο με τριβή Coulomb και στατική τριβή.

Το μοντέλο 1^{ης} τάξης δεν ενσωματώνει την περιοχή της στατικής τριβής, ούτε δίνει ένα μέγιστο της τριβής σε μία συγκεκριμένη απόσταση αποδέσμευσης όπως είχε παρατηρηθεί από τον Rabinowicz. Αυτό, όμως, μπορεί να γίνει με ένα μοντέλο 2^{ης} τάξης, το οποίο προκύπτει αν τεθεί:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\eta\varepsilon_f} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon_f} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{f_1}{\eta\varepsilon_f} \\ -\frac{f_2}{\varepsilon_f} \end{pmatrix} \text{ και } C = (1 \quad 1) \quad (3-22)$$

όπου $f_1 - f_2$ ανταποκρίνεται στην κινητική τριβή που προσεγγίζεται εκθετικά καθώς $s \rightarrow \infty$. Το προηγούμενο μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί σαν μια παράλληλη σύνδεση ενός γρήγορου και ενός αργού μοντέλου D.M. Το γρήγορο μοντέλο έχει υψηλότερη τριβή μόνιμης κατάστασης απ' ό,τι το αργό. Η δύναμη τριβής από το αργό μοντέλο στην μόνιμη κατάσταση αφαιρείται από την αντίστοιχη δύναμη που δίνει το γρήγορο μοντέλο, οπότε το μοντέλο εμφανίζεται να έχει ένα μέγιστο στατικής τριβής. Μ' αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται η ενσωμάτωση του φαινομένου Stribeck, το οποίο δεν λαμβάνεται υπόψη από το μοντέλο 1^{ης} τάξης.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το φαινόμενο Stribeck του μοντέλου 2^{ης} τάξης, όπως ισχυρίζονται οι Bliman-Sorine ότι ενσωματώνει, δεν είναι το ίδιο που παρατηρήθηκε από τον Stribeck, βλ. [91]. Το μιμούμενο από το 2^{ης} τάξης μοντέλο φαινόμενο Stribeck είναι παρόν μόνο σε μία συγκεκριμένη απόσταση αφού η κίνηση έχει ξεκινήσει. Αυτό σημαίνει ότι δεν θα εμφανιστεί όταν η κίνηση επιβραδύνεται, όπως γίνεται στο πραγματικό φαινόμενο Stribeck.

3.3.3 Τροποποιημένο μοντέλο του Dahl (M.D.M.)

Όπως αναφέρθηκε στην ανάλυση του μοντέλου D.M., βλ. Παρ. 3.3.1, ένα από τα βασικά του μειονεκτήματα είναι η μη ενσωμάτωση του φαινομένου Stribeck στα μόνιμα χαρακτηριστικά της τριβής, δηλαδή στην περιοχή ευσταθούς κατάστασης. Μία προσπάθεια ώστε το μοντέλο D.M. να συμπεριλάβει το φαινόμενο Stribeck, χωρίς ταυτόχρονα να αυξήσει την κατάσταση του συστήματος, έγινε από τον Canudas *et al.*, βλ. [35].

Ειδικότερα, στο τροποποιημένο μοντέλο (M.D.M.) η στατική σχέση μεταξύ της δύναμης τριβής και της σχετικής ταχύτητας είναι επιλεγμένη ώστε να περιλαμβάνει την τριβή Coulomb, την ιξώδη τριβή και το φαινόμενο Stribeck. Συγχρόνως, όμως, διατηρείται ο δυναμικός χαρακτήρας του μοντέλου D.M., με την σταθερά χρόνου να είναι ανάλογη του όρου $1/\nu$. Το μοντέλο M.D.M. περιγράφεται από το σύνολο των εξισώσεων:

$$\varepsilon \dot{z} = -|\nu|z + \nu F(\nu) \quad (3-23)$$

$$F_f = z + b\nu \quad (3-24)$$

με:

$$F(\nu) = \left[F_c + F_{str} \exp\left(-\left(\frac{\nu}{\nu_{str}}\right)^2\right) \right] \quad (3-25)$$

όπου:

z η εσωτερική κατάσταση τριβής

ε η σταθερά χρόνου.

Η δύναμη τριβής στην μόνιμη κατάσταση $F_{f,ss} = F_f(\nu, \dot{z} = 0)$ είναι:

$$F_{f,ss}(\nu) = \left[F_c + F_{str} \exp\left(-\left(\frac{\nu}{\nu_{str}}\right)^2\right) \right] \operatorname{sgn}(\nu) + b\nu \quad (3-26)$$

3.3.4 Το μοντέλο του Canudas (C.M.)

Το μοντέλο C.M. αναπτύχθηκε από τον Canudas *et al.*, βλ. [35]. Σ' αυτό, η τριβή κατά την προσκόλληση (F_{stick}) και η τριβή κατά τη ολίσθηση (F_{slip}) μοντελοποιείται ξεχωριστά.

Συγκεκριμένα, εισάγεται μια μεταβλητή s που εξαρτάται μόνο από την σχετική ταχύτητα και σκοπός της είναι να καθορίσει την περιοχή στην οποία λειτουργεί το σύστημα (προσκόλληση ή ολίσθηση). Η συνολική δύναμη τριβής δίνεται τότε από τον συνδυασμό αυτών των δύο συστατικών:

$$F_f = (1-s)F_{stick} + sF_{slip} \quad (3-27)$$

όπου η μεταβλητή s χρησιμοποιείται για να ζυγίσει κάθε έναν από τους δύο τύπους τριβής.

Η μεταβλητή s καθορίζεται από την λύση της δυναμικής εξίσωσης:

$$\tau_L \dot{s} = -s + \left[1 - \exp \left(- \left(\frac{v}{v_s} \right)^2 \right) \right] \quad (3-28)$$

όπου η σταθερά χρόνου τ_L περιλαμβάνεται για να λάβει υπόψη το φαινόμενο της τριβώδους μνήμης ή της τριβώδους καθυστέρησης, όπως παρατηρήθηκε από τους Hess-Soom, βλ. [56]. Η μεταβλητή s μπορεί να μεταφραστεί ως «μέτρο» της ολίσθησης, που έχει μία απολύτως καθορισμένη (σε αντίθεση με το στοχαστικό B.M. που προτάθηκε από τους Haessig-Friedland, βλ. [53]) κατανομή σε σχέση με την σχετική ταχύτητα. Για παράδειγμα

$s=1$ σημαίνει ολίσθηση, ενώ $s=0$ σημαίνει προσκόλληση.

Το σημείο εκκίνησης για την μοντελοποίηση της προσκόλλησης είναι η περιγραφή της σαν μια σύνδεση με ένα ελατήριο, K_s , και έναν αποσβεστήρα, b_s . Η στατική τριβή, όμως, πρέπει να περιορίζεται σε μια μοναδική δύναμη αποδέσμευσης F_s . Γι' αυτόν τον λόγο δίνεται από την εξίσωση:

$$F_{stick} = sat(F_s, (K_s \zeta + b_s v)) \quad (3-29)$$

Η μεταβλητή ζ είναι μια εσωτερική μεταβλητή που αντιπροσωπεύει την σχετική μετατόπιση από την θέση όπου συμβαίνει η προσκόλληση. Μοντελοποιείται από την εξίσωση:

$$\dot{\zeta} = (1-s)v - s \frac{1}{\tau_L} \zeta \quad (3-30)$$

όπου ο δεύτερος όρος χρησιμοποιείται για να μηδενίσει την μεταβλητή ζ όταν συμβαίνει ολίσθηση.

Η τριβή ολίσθησης, F_{slip} , μοντελοποιείται από την τριβή Coulomb και την ιξώδη τριβή ως:

$$F_{slip} = F_c \operatorname{sgn}(v) + bv \quad (3-31)$$

Να σημειωθεί ότι η δύναμη τριβής F_f , όπως καθορίστηκε στην Εξ. (3-27), είναι μια ομαλή καλά καθορισμένη συνάρτηση της ταχύτητας v , για παράδειγμα:

$$\lim_{v \rightarrow 0} F_f(v) = sat \left(\alpha, K_s \int_0^t v dt \right) \quad (3-32)$$

γι' αυτό είναι ανάλογη με την σχετική μετατόπιση (συμπεριφορά ελατηρίου).

Τα χαρακτηριστικά μόνιμης κατάστασης αυτού του μοντέλου $F_{f,ss}(\nu)$, περιλαμβάνουν επίσης το φαινόμενο Stribeck, π.χ.:

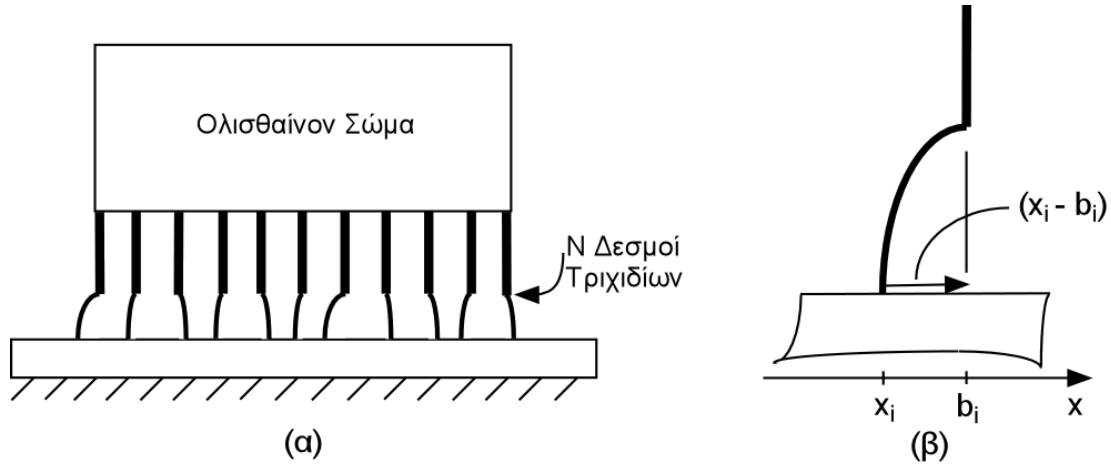
$$F_{f,ss}(\nu) = g(\nu)(F_c \operatorname{sgn}(\nu) + b\nu) + (1 - g(\nu)) \operatorname{sat}\left(\alpha, K_s \frac{\tau_L \nu (1 - g(\nu))}{g(\nu)} + b_s \nu\right) \quad (3-33)$$

με:

$$g(\nu) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\nu}{\nu_{str}}\right)^2\right) \quad (3-34)$$

3.3.5 Το “bristle model” (B.M.)

Το B.M., που αναπτύχθηκε από τους Haessig-Friedland, αποτελεί μία προσπάθεια να αναπαραχθεί το φυσικό φαινόμενο της αλληλεπίδρασης των προεξοχών των δύο τριβόμενων επιφανειών με έναν τρόπο κατάλληλο για προσομοίωση σε υπολογιστή, βλ. [53]. Ειδικότερα, το φυσικό παράδειγμα στο οποίο στηρίχτηκε η ανάπτυξη του B.M. είναι ένα ζευγάρι από αντικρινές επιφάνειες με τριχίδια τα οποία προεκτείνονται από την κάθε μία, σύμφωνα με το σχήμα:



Σχήμα 3-5. “Bristle model”, (α) N τυχαία τοποθετημένοι δεσμοί τριχιδίων, (β) ένας μοναδικός δεσμός.

Η απόσταση μεταξύ των τριχιδίων σε κάθε επιφάνεια είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία έχει στατιστικές ιδιότητες συνεπείς με μακροσκοπικά χαρακτηριστικά της τριβής. Η τριβή μεταξύ των δύο επιφανειών θεωρείται ότι προκαλείται από ένα μεγάλο αριθμό τριχιδίων (που αντιπροσωπεύουν, για παράδειγμα, τις μοριακές δυνάμεις), κάθε ένα από τα οποία συμβάλει, κατά ένα ποσοστό, στο συνολικό φορτίο της τριβής. Το φορτίο που συνεισφέρεται από το κάθε τριχίδιο θεωρείται ότι είναι ανάλογο της καταπόνησης του τριχιδίου.

Ο αριθμός των φυσικών δεσμών που υπάρχουν μεταξύ δύο πραγματικών τριβόμενων επιφανειών είναι πιθανώς πολύ μεγάλος. Ωστόσο, αυτό δεν σημαίνει ότι κάθε ένας από τους δεσμούς θα αντιπροσωπεύεται άμεσα στο μοντέλο. Οι Haessig-Friedland βρήκαν ότι ένας σχετικά μικρός αριθμός (π.χ. μικρότερος από 50) ξεχωριστών τριχιδίων μπορεί να είναι αρκετός για να αντιπροσωπεύσει το αποτέλεσμα του φαινομένου των δεσμών. Αυτό επιτυγχάνεται αντικαθιστώντας τους δεσμούς που υπάρχουν στην πραγματικότητα σε ένα ποσοστό της συνολικής επιφάνειας από έναν θεωρητικό δεσμό.

Κάθε δεσμός αντιπροσωπεύει μία αλληλεπίδραση μεταξύ των άκαμπτων και ελαστικών τριχιδίων που είναι προσαρτημένα στην κάτω επιφάνεια με τα άκαμπτα τριχίδια που είναι προσαρτημένα στην πάνω επιφάνεια, βλ. Σχ. 3-5. Τα άκαμπτα τριχίδια συνδέονται με τα ελαστικά τριχίδια, όταν καταλαμβάνουν την ίδια θέση b_i . Το ευλύγιστο τριχίδιο τότε εκτρέπεται από το άκαμπτο τριχίδιο σε μία νέα θέση, x_i , και εφαρμόζει στο κινούμενο σώμα το φορτίο, $-K_b \cdot (x_i - b_i)$. Όταν η εκτροπή φτάνει το σημείο θλάσης δ_s ο δεσμός σπάει. Τότε ένας νέος δεσμός δημιουργείται μεταξύ του ίδιου άκαμπτου τριχιδίου και ενός νέου ευλύγιστου τριχιδίου σε μία διαφορετική θέση.

Η θέση του νέου ευλύγιστου τριχιδίου σχετικά με το προηγούμενο θεωρείται ότι είναι τυχαία, δεδομένου ότι κάθε τριχίδιο αντιπροσωπεύει χιλιάδες δεσμούς. Οι θέσεις των δεσμών επηρεάζονται πιθανώς από τα χαρακτηριστικά των επιφανειών σε επαφή, π.χ. την μοριακή δομή, την ομαλότητα της επιφάνειας, κτλ. Θεωρώντας ότι οι νέες θέσεις των δεσμών καθορίζονται σε σχέση με τις προηγούμενες θέσεις τους, επιτρέπεται να υπολογιστούν άμεσα (on-line) οι νέες θέσεις του δεσμού κατά την διάρκεια μιας προσομοίωσης.

Οι νέες θέσεις του τριχιδίου καθορίζονται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$b_i = b_i + \text{uniform}(\Delta) \text{sgn}(\delta_i) \quad (3-35)$$

όπου $\delta_i = x_i - b_i$ η παραμόρφωση του τριχιδίου i . Η απόσταση μεταξύ των τριχιδίων είναι τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα από 0 έως Δ . Τα νέα τριχίδια τοποθετούνται στην κατεύθυνση όπου τείνει να μειώσει την καταπόνηση του δεσμού. Με βάσει την λογική αυτή μπορεί να δημιουργηθεί ένας αλγόριθμος προκειμένου να υπολογιστεί η δύναμη τριβής με την βοήθεια ενός υπολογιστή.

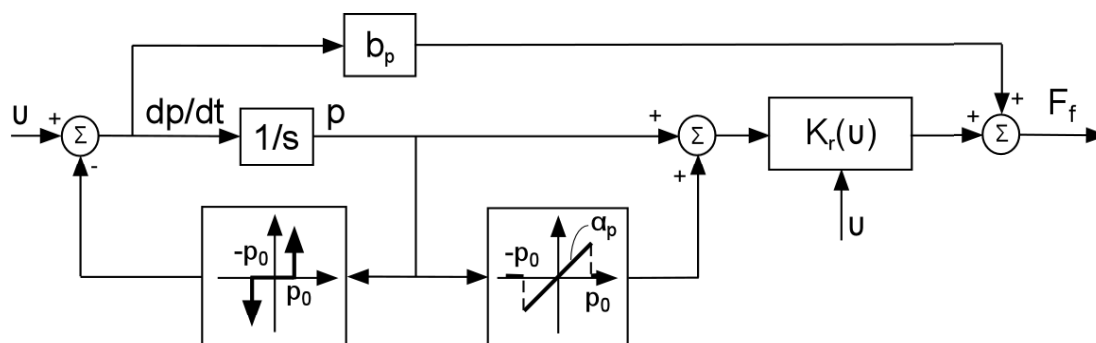
Το μοντέλο B.M. σχεδιάστηκε για ακρίβεια, χωρίς να δοθεί σημασία στην χρησιμοποίηση του υπολογιστικού χρόνου. Εξαιτίας των μικρών αποστάσεων μεταξύ των τριχιδίων και των ασυνεχειών λόγω των θλάσεων των τριχιδίων, το μοντέλο μπορεί να είναι αναποτελεσματικό, αναγκάζοντας τον αλγόριθμο ολοκλήρωσης να παίρνει υπερβολικά μικρά χρονικά βήματα. Επίσης, αν ο αλγόριθμος ολοκλήρωσης χρησιμοποιεί ένα χρονικό βήμα το οποίο περικλείει την θλάση ενός τριχιδίου, τότε το σπασμένο τριχίδιο

πρέπει να επαναπροσκολληθεί. Αυτό περιπλέκει ουσιαστικά τις υπορουτίνες του μοντέλου δαπανώντας ακόμα περισσότερο υπολογιστικό χρόνο. Εξαιτίας των περιορισμών αυτών, το μοντέλο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μόνο για προσομοιώσεις που απαιτούν υψηλή ακρίβεια.

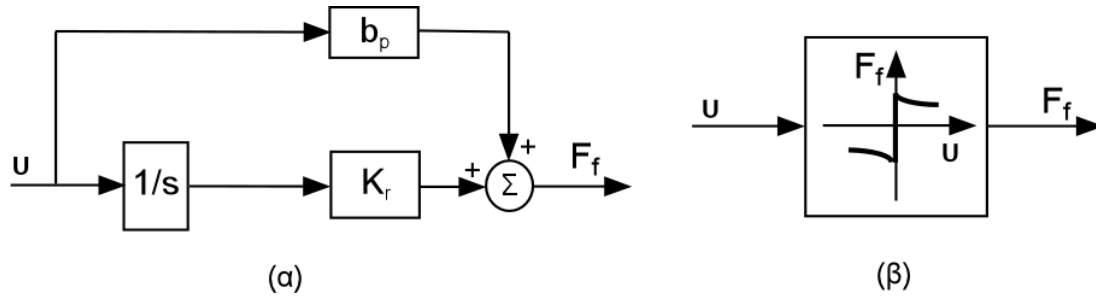
3.3.6 Το “reset integrator model” (R.I.M.)

Το μοντέλο R.I.M., που αναπτύχθηκε από τους Haessig-Friedland, βλ. [53], σκοπό έχει να υπερκεράσει το πρόβλημα των πολλαπλών συνόλων διαφορετικών εξισώσεων της προσέγγισης Karnopp, βλ. Παρ. 3.1.3. Το μοντέλο R.I.M. ονομάζεται έτσι διότι απαιτεί την χρήση ενός βοηθητικού ολοκληρωτή για να αναπαριστά την περιοχή της στατικής τριβής. Αν και στην προσομοίωση το R.I.M. εμφανίζεται να παρουσιάζει συμπεριφορά ανάλογη με εκείνη του μοντέλου Karnopp, η εφαρμογή του είναι τελείως ανεξάρτητη από το σύστημα. Με άλλα λόγια η μορφή και η πολυπλοκότητα του μοντέλου δεν εξαρτάται από το σύστημα και δεν απαιτεί την επαναπαραγωγή του μοντέλου τριβής για κάθε νέα εφαρμογή.

Το R.I.M., όπως και το B.M., αντιπροσωπεύουν με μεγάλη ακρίβεια το φαινόμενο του δεσμού που λαμβάνει χώρα κατά την φάση της προσκόλλησης στην κίνηση S.S. Αυτό επιτυγχάνεται εκφράζοντας την δύναμη τριβής κατά την φάση της προσκόλλησης σαν συνάρτηση της θέσης, χωρίς να χρησιμοποιούνται τριχίδια. Αντίθετα, δημιουργείται εσωτερικά μία μονοδιάστατη μεταβλητή θέσης, βλ. Σχ. 3-6.



Σχήμα 3-6. “Reset integrator friction model”.



Σχήμα 3-7. “Reset integrator model” κατά την διάρκεια της (α) προσκόλλησης, και (β) ολίσθησης.

Η είσοδος στο μοντέλο είναι η σχετική ταχύτητα μεταξύ των επιφανειών σε επαφή, v . Αυτή η είσοδος συγκρίνεται με την έξοδο από ένα μη γραμμικό “block” που έχει την δυνατότητα απόρριψης της εισόδου στον ολοκληρωτή κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες. Η είσοδος του ολοκληρωτή, $\dot{p}$, καθορίζεται ως εξής:

$$\dot{p} = \begin{cases} 0, & \text{όταν } \begin{cases} v > 0, & p \geq p_0 \\ v < 0, & p \leq -p_0 \end{cases} \\ v, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3-36)$$

Η μεταβλητή θέσης p πολλαπλασιάζεται με τον συντελεστή της σχετικής ελαστικής παραμόρφωσης, K_r , για να καθορίσουν μέρος του φορτίου τριβής F_f . Στο μοντέλο R.I.M., όπως και στο B.M. η δύναμη τριβής στη στατική περιοχή είναι μία συνάρτηση της καταπόνησης του δεσμού, μόνο που σ’ αυτήν την περίπτωση ο δεσμός είναι ανεξάρτητος. Ένα επιπλέον φορτίο, $p\alpha_p K_r$, προστίθεται για να δημιουργηθούν τα μεγαλύτερα φορτία που εμφανίζονται κατά την προσκόλληση, π.χ., όταν $|p| < p_0$. Η έξοδος του μη γραμμικού “block”, το οποίο παρέχει αυτό το επιπρόσθετο φορτίο, πέφτει στο μηδέν όταν το $|p|$ φτάνει το p_0 . Εκείνη την στιγμή το σώμα αρχίζει να ολισθαίνει και το συνολικό φορτίο τριβής γίνεται pK_r . Επίσης εισάγεται ένας όρος απόσβεσης, $b_p \dot{p}$, για φυσικό ρεαλισμό.

Το R.I.M. παίρνει μία πολύ απλή μορφή όταν βρίσκεται σε οποιαδήποτε από τις δύο φάσεις, δηλαδή την φάση της προσκόλλησης και την φάση της ολίσθησης. Όταν το σώμα βρίσκεται στην φάση της προσκόλλησης, η μη γραμμική ανάδραση είναι μηδενική, οπότε το μοντέλο τριβής παίρνει την μορφή του Σχ. 3-7(α), θεωρώντας ότι το K_r είναι μία σταθερά και όχι μία συνάρτηση της ταχύτητας. Όταν υπάρχει ολίσθηση, η μη γραμμικότητα διατηρεί την έξοδο του ολοκληρωτή, p , σταθερή, οπότε η είσοδος στο

“block” του συντελεστή ελαστικής παραμόρφωσης είναι σταθερή, $p(1+\alpha_p)$, και ο όρος απόσβεσης είναι μηδέν. Σ’ αυτήν την κατάσταση το μοντέλο παίρνει την μορφή που φαίνεται στο Σχ. 3-7(β). Η δύναμη τριβής δίνεται τότε από την εξίσωση:

$$F_f = K_r(\nu) p_0 \operatorname{sgn}(p) \quad (3-37)$$

η οποία γράφεται μ’ αυτόν τον τρόπο για να δοθεί έμφαση στο ότι η μεταβλητή p είναι σταθερή. Η τριβή ολίσθησης μπορεί να γίνει μία συνάρτηση της ταχύτητας μέσω της διαμόρφωσης του συντελεστή ελαστικής παραμόρφωσης $K_r(\nu)$.

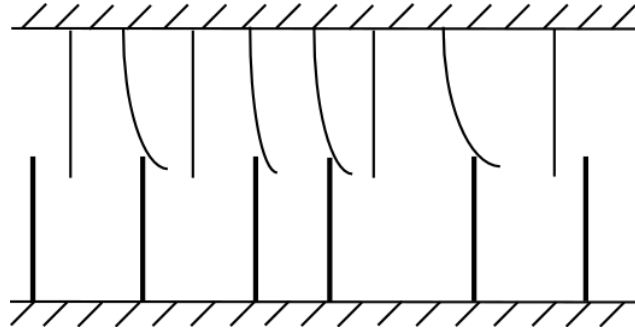
Το μοντέλο R.I.M. χρησιμοποιεί σημαντικά μικρότερο υπολογιστικό χρόνο από εκείνον που χρειάζεται το μοντέλο B.M. Ειδικότερα, όταν το σώμα, του οποίου η κίνηση προσομοιώνεται, ολισθαίνει, το φορτίο της τριβής είναι μία συνάρτηση της ταχύτητας που καθορίζεται από τον χρήστη. Αν και δεν απαιτείται, τυπικά, η τριβή ολίσθησης θα είναι μία ομαλή, συνεχής συνάρτηση, οπότε το μικρό χρονικό βήμα ολοκλήρωσης που προκαλείται από τα σπασμένα τριχίδια αποφεύγεται. Επίσης, δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα αν χρησιμοποιηθεί ένας αλγόριθμος ολοκλήρωσης μεταβλητού βήματος.

Αν και δεν μπορεί να είναι άμεσα εμφανές, η προσέγγιση του Karnopp παράγει ένα μοντέλο τριβής το οποίο είναι πολύ όμοιο με μία πολύ περιορισμένη μορφή του R.I.M. Συγκεκριμένα, το μοντέλο Karnopp υπολογίζει μία δύναμη τριβής στην στατική περιοχή η οποία αναιρεί την εξωτερική δύναμη όταν η εσωτερική μεταβλητή θέσης, p , βρίσκεται στο διάστημα $\pm p_0$. Όμως, η δύναμη τριβής στη στατική περιοχή καθορίζεται μέσω της παραμόρφωσης ενός συστήματος με ελατήριο και αποσβεστήρα. Το R.I.M. μπορεί να γίνει σχεδόν ίδιο με το μοντέλο Karnopp θεωρώντας ότι ο συντελεστής ελαστικής παραμόρφωσης και ο συντελεστής απόσβεσης πηγαίνουν στο άπειρο.

3.3.7 Το μοντέλο Lund-Grenoble (L.G.M.)

Το μοντέλο L.G.M. αναπτύχθηκε από τους Canudas *et al.*, βλ. [36], με σκοπό τόσο την μοντελοποίηση της στατικής περιοχής όσο και την ενσωμάτωση των χαρακτηριστικών της τριβής ευσταθούς κατάστασης στα οποία μπορεί να συμπεριλαμβάνεται και το φαινόμενο Stribeck.

Το μοντέλο στηρίζεται στην θεώρηση ότι τα δύο στερεά σώματα έρχονται σε επαφή μέσω ελαστικών τριχιδίων. Όταν εφαρμόζεται μία επαπτομενική δύναμη, τα τριχίδια παραμορφώνονται σαν ελατήρια, γεγονός που δίνει αύξηση στην δύναμη τριβής.



Σχήμα 3-8. Η δημιουργία της τριβής μεταξύ δύο επιφανειών.

Αν η δύναμη είναι αρκετά μεγάλη, ορισμένα απ' τα τριχίδια παραμορφώνονται τόσο πολύ ώστε ολισθαίνουν. Το φαινόμενο είναι αρκετά τυχαίο, λόγω της ασυνέχειας την οποία παρουσιάζει η μορφή των επιφανειών. Γι' αυτόν τον λόγο το μοντέλο το οποίο προτείνεται βασίζεται στην μέση συμπεριφορά των τριχιδίων. Ειδικότερα, ορίζεται η μέση παραμόρφωση των τριχιδίων, η οποία συμβολίζεται με την μεταβλητή z και μοντελοποιείται από την εξίσωση:

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{|v|}{g(v)} z \quad (3-38)$$

Ο πρώτος όρος δίνει μια παραμόρφωση που είναι ανάλογη του ολοκληρώματος της σχετικής ταχύτητας. Ο δεύτερος όρος βεβαιώνει ότι η παραμόρφωση z προσεγγίζει την τιμή:

$$z_{ss} = \frac{v}{|v|} g(v) = g(v) \operatorname{sgn}(v) \quad (3-39)$$

στην μόνιμη κατάσταση, π.χ. όταν η σχετική ταχύτητα v είναι σταθερή.

Η συνάρτηση g είναι θετική και εξαρτάται από πολλές παραμέτρους όπως π.χ., τις ιδιότητες των υλικών, την λίπανση, την θερμοκρασία, ενώ συγχρόνως δεν χρειάζεται να είναι συμμετρική. Για τυπικές τριβές ρουλεμάν, η $g(v)$ θα μειώνεται μονότονα από $g(0)$ όταν η σχετική ταχύτητα v αυξάνει. Η δύναμη τριβής η οποία δημιουργείται από την κάμψη των τριχιδίων περιγράφεται σαν:

$$F_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} \quad (3-40)$$

όπου:

σ_0 ο συντελεστής δυσκαμψίας,

σ_1 ο συντελεστής απόσβεσης.

Ένας όρος ανάλογος με την σχετική ταχύτητα μπορεί να προστεθεί στην δύναμη τριβής για να ληφθεί υπόψη η ιξώδης τριβή, έτσι ώστε:

$$F_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + b v \quad (3-41)$$

Το μοντέλο που δίνεται από τις Εξ. (3-38), (3-41), χαρακτηρίζεται από την συνάρτηση g και τις παραμέτρους σ_0 , σ_1 και b . Η συνάρτηση $\sigma_0 g(v) + b v$ μπορεί να καθοριστεί μετρώντας την δύναμη τριβής όταν η ταχύτητα διατηρείται σταθερή.

Μία παραμετροποίηση της g που έχει προταθεί για να περιγράψει το φαινόμενο Stribeck είναι:

$$\sigma_0 g(v) = F_c + (F_s - F_c) \exp \left[- \left(\frac{v}{v_{str}} \right)^2 \right] \quad (3-42)$$

Με αυτήν την περιγραφή, το μοντέλο χαρακτηρίζεται από έξι παραμέτρους, που είναι οι εξής: σ_0 , σ_1 , b , F_c , F_s και v_{str} .

Από τις Εξ. (3-39), (3-42) προκύπτει ότι για κίνηση μόνιμης κατάστασης η σχέση μεταξύ της ταχύτητας και της δύναμης τριβής δίνεται από:

$$F_{f,ss}(v) = \sigma_0 g(v) + b v = \left[F_c + (F_s - F_c) \exp \left[- \left(\frac{v}{v_{str}} \right)^2 \right] \right] \text{sgn}(v) + b v \quad (3-43)$$

Το μοντέλο καταλήγει στο μοντέλο D.M. αν $g(v) = \frac{F_c}{\sigma_0}$ και $\sigma_1 = b = 0$.

Συγκεκριμένα, οι Εξ. (3-38), (3-41) δίνουν:

$$\frac{dF_f}{dt} = \sigma_0 \frac{dz}{dt} = \sigma_0 v \left(1 - \frac{F_f}{F_c} \text{sgn}(v) \right) \quad (3-44)$$

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην υπάρχουν μεγάλες διαφορές και ως προς τις ιδιότητες τους, ειδικότερα όσον αφορά τη στατική περιοχή. Συγκεκριμένα, εμφανίζεται το φαινόμενο της στιβάδας, όπως ακριβώς και στο μοντέλο D.M., λόγω του ότι δεν έχει ενσωματωθεί το φαινόμενο της μνήμης της στατικής τριβής, βλ. Παρ. 2.1.2.2.2. Ωστόσο, η μόνη περίπτωση να εμφανιστεί πλήρης ο βρόχος υστέρησης είναι τα δύο σημεία αντιστροφής της δύναμης να είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων στο διάγραμμα δύναμης-μετατόπισης.

Παρ' όλα αυτά, σ' αυτήν την περίπτωση, ο τρόπος μοντελοποίησης της στατικής περιοχής στο μοντέλο L.G.M. είναι αρκετά διαφορετικός, προσεγγίζοντας, απ' την μια μεριά, περισσότερο την πραγματικότητα, εισάγοντας όμως, απ' την άλλη, μία επιπλέον κατάσταση. Μάλιστα, η τελευταία δεν μπορεί να μετρηθεί άμεσα, παρά μόνο με την χρήση

ενός παρατηρητή. Αυτό σημαίνει ότι απαιτείται περισσότερος υπολογιστικός χρόνος προκειμένου να εξαχθεί η δύναμη τριβής, γεγονός που ίσως αποτελεί ένα σημαντικό μειονέκτημα αυτού του μοντέλου όταν ενδιαφερόμαστε περισσότερο για τα χαρακτηριστικά μόνιμης κατάστασης. Σε αυτήν τη περίπτωση, το γενικό κινητικό μοντέλο τριβής, βλ. Παρ. 3.1.2, θα αποτελούσε ιδανικότερη λύση, βλ. [7], αφού μοντελοποιούν τα ίδια φαινόμενα.

4 Ανάλυση μη γραμμικών συστημάτων ελέγχου

4.1 Εισαγωγή

Αποτελεί κοινό τόπο ότι δεν υπάρχει μια γενική μέθοδος για την αντιμετώπιση όλων των μη γραμμικών συστημάτων. Ειδικότερα, ακριβείς λύσεις μπορούν να βρεθούν μόνο από απλές μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Επίσης, για πολλές μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρακτικού ενδιαφέροντος, είναι πιθανόν να βρεθούν μόνο προσεγγιστικές λύσεις, και αυτές οι λύσεις παραμένουν αληθείς μόνο κάτω από τις περιορισμένες συνθήκες υπό τις οποίες προέκυψαν.

Μερικές από τις μεθόδους ανάλυσης και σχεδιασμού μη γραμμικών συστημάτων ελέγχου είναι οι εξής:

- ❑ Ανάλυση με περιγραφική συνάρτηση (Describing Function Analysis – D.F.A.)
- ❑ Αλγεβρική ανάλυση (Algebraic Analysis – A.A.)
- ❑ Phase-plane analysis (P.P.A.)
- ❑ Ανάλυση με προσομοίωση (Simulation)

Η προσομοίωση (simulation) δεν θεωρείται φυσιολογικά μέθοδος ανάλυσης, αλλά όταν γίνουν επαρκείς δοκιμές, π.χ. χιλιάδες δοκιμές, τότε μπορεί να καταγραφεί η συμπεριφορά του συστήματος και να προκύψουν εμπειρικές σχέσεις.

Σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις στις οποίες εφαρμόστηκαν αυτές οι μέθοδοι, ο σκοπός ήταν να προβλεφθούν οι συνθήκες για κίνηση S.S. Ο χαρακτήρας του αποτελέσματος εξαρτάται πάρα πολύ από το μοντέλο τριβής, την εφαρμογή και τον τρόπο ελέγχου. Για έναν κύκλο ολίσθησης (slip cycle) κατά τον οποίο η ταχύτητα δεν αντιστρέφεται, πράγμα που συμβαίνει συνήθως σε εφαρμογές παρακολούθησης τροχιάς (tracking tasks), βλ. [44], ένα μοντέλο τριβής Coulomb επιτρέπει μία ακριβή ολοκλήρωση κατά την διάρκεια ενός κύκλου ολίσθησης (slip cycle) και έτσι μπορούν να προκύψουν ακριβή αλγεβρικά αποτελέσματα. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις, υπεισέρχονται προσεγγίσεις. Ο χαρακτήρας των προσεγγίσεων και η επίδρασή τους στην ισχύ των συμπερασμάτων αποτελούν σημαντικά ζητήματα σε όλες τις αναλύσεις.

4.1.1 Ανάλυση με περιγραφική συνάρτηση (D.F.A.)

Η D.F.A. είναι μία από τις ισοδύναμες μεθόδους γραμμικοποίησης. Σε πολλές πρακτικές περιπτώσεις μας ενδιαφέρει κυρίως η ευστάθεια του μη γραμμικού συστήματος ελέγχου, και αναλυτικές λύσεις των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων μπορεί να μην είναι

απαραίτητες (η εφαρμογή των κριτηρίων ευστάθειας είναι πολύ απλούστερη από την εύρεση αναλυτικών λύσεων.)

Η D.F.A. δίνει την δυνατότητα να μελετηθεί η ευστάθεια πολλών απλών μη γραμμικών συστημάτων ελέγχου με την βοήθεια του πεδίου συχνότητας. Προσφέρει πληροφορίες ευστάθειας για ένα σύστημα οποιασδήποτε τάξης, αλλά δεν δίνει ακριβείς πληροφορίες όσον αφορά τα χαρακτηριστικά της χρονικής απόκρισης, διότι κατά την χρησιμοποίηση της μεθόδου γίνονται ορισμένες παραδοχές.

4.1.2 Αλγεβρική ανάλυση (A.A.)

Η A.A. βασίζεται στην ολοκλήρωση των εξισώσεων της κίνησης κατά έναν κύκλο ολίσθησης και εν συνεχεία στον καθορισμό του αν το σύστημα φτάνει ξανά σε κατάσταση προσκόλλησης.

Όταν ένα μοντέλο τριβής Coulomb ή τριβής Coulomb και ιξώδους τριβής εφαρμοστεί κατά την ολίσθηση οι εξισώσεις της κίνησης μπορούν να ολοκληρωθούν επακριβώς, βλ. [39], [44], [88], [89]. Η στατική τριβή μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν μια τροποποίηση της αρχικής συνθήκης της τροχιάς.

Θεωρώντας ένα μοντέλο στατικής τριβής, τριβής Coulomb και ιξώδους τριβής ο Derjaguin *et al*, βλ. [44], έδωσε ίσως την πιο ξεκάθαρη παρουσίαση αυτής της τεχνικής. Εστίασαν την προσοχή τους σε ένα σύστημα δεύτερης τάξης (ανάλογο με εκείνο της μιας μάζας με PD έλεγχο) και μελέτησαν την επίδραση του φαινομένου R.S.F., βλ. Παρ. 2.3.3. Εφαρμόζοντας διαστατική ανάλυση (dimensional analysis), ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις της κίνησης κατά την διάρκεια της ολίσθησης και ανιχνεύοντας κίνηση S.S. μέσω της εξέτασης του πότε η τροχιά ξαναφθάνει πάλι στην μηδενική ταχύτητα, καθόρισαν ότι υπάρχει ένα κρίσιμο επίπεδο της στατικής τριβής κάτω από το οποίο η κίνηση S.S. θα εξαλείφεται.

4.1.3 Phase Plane Analysis (P.P.A.)

Η P.P.A. μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παρουσιάσει γραφικά τις τροχιές του συστήματος, γραμμικές και μη γραμμικές. Σε περιπτώσεις όπου θεωρητικοί περιορισμοί στον χαρακτήρα των τροχιών δεν είναι πιθανές, η P.P.A. εξυπηρετεί ως μια γραφική παρουσίαση των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης, και μπορεί να λεχθεί ότι επιδεικνύει γενικά αποτελέσματα για το σύστημα όταν εξερευνούνται τροχιές που καλύπτουν χρονικά ένα επαρκές εύρος αρχικών συνθηκών. Σε άλλες περιπτώσεις, όπου είναι πιθανόν να υπάρχουν θεωρητικοί περιορισμοί στην συμπεριφορά των τροχιών, η P.P.A. εξυπηρετεί στην οργάνωση και ταξινόμηση των αλληλεπιδράσεων και των συνεπειών αυτών των περιορισμών.

Η διάσταση (dimensionality) του “phase-plane” (P.P.) είναι η τάξη της κατάστασης του συστήματος. Έτσι μία μάζα με PD έλεγχο έχει ένα P.P. δύο διαστάσεων, το οποίο μπορεί εύκολα να πραγματοποιηθεί και να ερμηνευτεί. Το ίδιο σύστημα όμως με ολοκληρωτικό έλεγχο, έχει τρεις διαστάσεις, και μπορεί να είναι δύσκολο να παρασταθεί. Ένα σύστημα δύο μαζών με ελαστικότητα και ολοκληρωτικό έλεγχο, έχει πέντε καταστάσεις και πιθανόν να μην ωφελεί να μελετηθεί με την μέθοδο P.P.A.

4.1.4 Ανάλυση με προσομοίωση (simulation)

Για την ανάλυση και την σύνθεση του κατευθυντή, οι υπόλοιπες μέθοδοι ανάλυσης εφαρμόζονται στα μοντέλα του συστήματος. Όταν τα μοντέλα επιτρέπουν ακριβή ανάλυση, η ισχύς των αποτελεσμάτων εξαρτώνται μόνο από την ισχύ του ίδιου του μοντέλου. Όταν περισσότερο πολύπλοκα συστήματα αναλύονται με προσεγγιστικές τεχνικές, όπως π.χ. είναι η D.F.A., η ισχύς των αποτελεσμάτων εξαρτώνται όχι μόνο από την ισχύ του μοντέλου αλλά και από τις παραδοχές που έχουν γίνει κατά την εφαρμογή της μεθόδου ανάλυσης.

Η προσομοίωση (simulation) παρέχει έναν τρόπο επιβεβαίωσης της ισχύος και του μοντέλου και της μεθόδου ανάλυσης. Η αντιπαραβολή του πειράματος με την προσομοίωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιβεβαιώσει την ισχύ των μοντέλων. Επίσης, η αντιπαραβολή αναλυτικών αποτελεσμάτων με την προσομοίωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιβεβαιώσει την ισχύ των προσεγγιστικών μεθόδων ανάλυσης.

4.2 Ανάλυση με περιγραφική συνάρτηση (D.F.A.)

4.2.1 Ορισμός της περιγραφικής συνάρτησης (D.F.)

Αν υποθεθεί ότι η είσοδος σε ένα μη γραμμικό στοιχείο είναι ημιτονοειδής, τότε η έξοδος από το μη γραμμικό στοιχείο είναι, γενικά, μη ημιτονοειδής. Έστω ότι η έξοδος είναι περιοδική με την ίδια βασική περίοδο που έχει και η είσοδος (εκτός από την βασική αρμονική συνιστώσα η έξοδος περιέχει και υψηλότερες αρμονικές).

Στην D.F.A., θεωρείται ότι μόνο η βασική αρμονική συνιστώσα της εξόδου είναι σημαντική. Μια τέτοια υπόθεση συχνά ευσταθεί αφού οι υψηλότερες αρμονικές της εξόδου του μη γραμμικού στοιχείου είναι συχνά μικρότερου πλάτους από το πλάτος της βασικής αρμονικής συνιστώσας. Επίσης, τα περισσότερα συστήματα ελέγχου είναι χαμηλοπερατά φίλτρα, με αποτέλεσμα οι υψηλότερες αρμονικές να εξασθενούν σημαντικά συγκριτικά με την βασική αρμονική συνιστώσα.

Η D.F. ή η ημιτονοειδής D.F. ενός μη γραμμικού στοιχείου καθορίζεται ως το μιγαδικό κλάσμα της βασικής αρμονικής συνιστώσας της εξόδου προς την είσοδο:

$$N = Y_1 / X \angle \Phi_1 \quad (4-1)$$

όπου:

N η D.F.,

X το πλάτος της ημιτονοειδούς εισόδου,

Y_1 το πλάτος της βασικής αρμονικής συνιστώσας της εξόδου,

Φ_1 η διαφορά φάσης μεταξύ της βασικής αρμονικής συνιστώσας της εξόδου και της εισόδου.

Αν στο μη γραμμικό στοιχείο δεν υπάρχει στοιχείο αποθήκευσης ενέργειας, τότε η N είναι συνάρτηση μόνο του πλάτους της εισόδου στο στοιχείο. Αν όμως υπάρχει στοιχείο αποθήκευσης ενέργειας, τότε η N είναι συνάρτηση και του πλάτους και της συχνότητας της εισόδου.

Στον υπολογισμό της D.F. για ένα δοθέν μη γραμμικό στοιχείο, χρειάζεται να υπολογιστεί η βασική αρμονική συνιστώσα της εξόδου. Για την ημιτονοειδή είσοδο $x(t) = X \cdot \sin(\omega t)$ του μη γραμμικού στοιχείου, η έξοδος $y(t)$ μπορεί να εκφραστεί σαν σειρά Fourier ως εξής:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \phi_n) \quad (4-2)$$

όπου:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos(n\omega t) d(\omega t)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin(n\omega t) d(\omega t)$$

$$Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\phi_n = \tan^{-1} \left(\frac{A_n}{B_n} \right)$$

Αν η μη γραμμικότητα είναι συμμετρική, τότε $A_0 = 0$. Η βασική αρμονική συνιστώσα της εξόδου είναι σ' αυτήν την περίπτωση:

$$y_1(t) = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t) = Y_1 \sin(\omega t + \phi_1) \quad (4-3)$$

Τότε η D.F. δίνεται από την εξίσωση:

$$N = Y_1 / X \angle \Phi_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{X} \angle \tan^{-1} \left(\frac{A_1}{B_1} \right) \quad (4-4)$$

Από την Εξ. (4-4) φαίνεται ότι η συνάρτηση N είναι μιγαδική ποσότητα όταν η γωνία ϕ δεν είναι μηδενική.

4.2.2 Η D.F.A. σε μη γραμμικά συστήματα ελέγχου

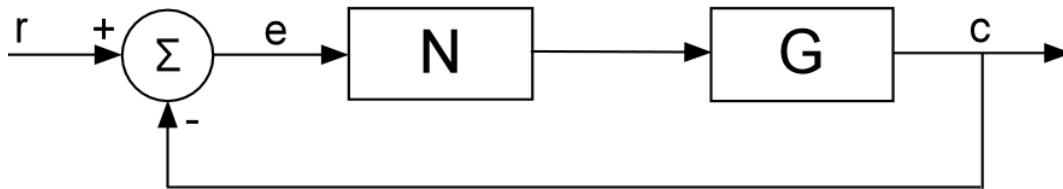
Πολλά συστήματα ελέγχου που περιλαμβάνουν μη γραμμικά στοιχεία μπορούν να εκφραστούν από το δομικό διάγραμμα το οποίο ακολουθεί:



Σχήμα 4-1. Μη γραμμικό σύστημα ελέγχου.

Αν οι υψηλότερες αρμονικές που δημιουργούνται από το μη γραμμικό στοιχείο είναι επαρκώς εξασθενημένες από τα γραμμικά στοιχεία, έτσι ώστε μόνο η βασική αρμονική συνιστώσα της εξόδου από το μη γραμμικό στοιχείο να είναι σημαντική, τότε η ευστάθεια του συστήματος μπορεί να προβλεφθεί με την D.F.A.

Αν N είναι η D.F. του μη γραμμικού στοιχείου, και G είναι η συνάρτηση μεταφοράς του γραμμικού στοιχείου, το μη γραμμικό σύστημα του Σχ. 4-1, μπορεί να εκφραστεί από το δομικό διάγραμμα του σχήματος:



Σχήμα 4-2. Μη γραμμικό σύστημα ελέγχου.

Αν οι υψηλότερες αρμονικές είναι επαρκώς εξασθενημένες από το γραμμικό τμήμα του συστήματος, G , η D.F., N , μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πραγματικό ή μιγαδικό κέρδος. Σ' αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου γίνεται:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{NG(j\omega)}{1 + NG(j\omega)} \quad (4-5)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η εξής:

$$1 + NG(j\omega) = 0 \Leftrightarrow G(j\omega) = -\frac{1}{N} \quad (4-6)$$

Αν η Εξ. (4-6) ικανοποιείται, τότε η έξοδος του συστήματος θα παρουσιάσει οριακό κύκλο (limit cycle, L.C.). Αυτή η κατάσταση ανταποκρίνεται στην περίπτωση όπου το διάγραμμα Nyquist του γραμμικού στοιχείου, $G(j\omega)$, περνά από το κρίσιμο σημείο (στην βασική ανάλυση στο πεδίο συχνότητας το κρίσιμο σημείο είναι το $-1 + j0$ ή το $-\frac{1}{K} + j0$).

Στην D.F.A., η βασική ανάλυση στο πεδίο συχνότητας μετασχηματίζεται έτσι ώστε ο συνολικός τόπος $-1/N$ να γίνεται ένας τόπος από κρίσιμα σημεία. Έτσι, η σχετική θέση των δύο τόπων $-1/N$ και $G(j\omega)$ δίνει την πληροφορία για την ευστάθεια.

4.2.3 Κριτήριο Ευστάθειας του Μη Γραμμικού Συστήματος

Για να καθοριστεί η ευστάθεια του συστήματος, σχεδιάζεται ο τόπος $-1/N$ και ο τόπος $G(j\omega)$. Θα θεωρηθεί ότι το γραμμικό στοιχείο του συστήματος είναι ελάχιστης φάσης ή ότι όλοι οι πόλοι και οι μηδενιστές βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο του πεδίου συχνότητας (s plane).

Το κριτήριο της ευστάθειας λέει ότι αν ο τόπος $-1/N$ δεν περιβάλλεται από τον τόπο $G(j\omega)$, τότε το σύστημα είναι ευσταθές, ή διαφορετικά ότι δεν υπάρχει L.C. στην μόνιμη κατάσταση. Από την άλλη πλευρά, αν ο τόπος $-1/N$ περιβάλλεται από τον τόπο $G(j\omega)$, τότε το σύστημα είναι ασταθές, και η έξοδος του συστήματος όταν το τελευταίο υποβάλλεται σε μία οποιαδήποτε διαταραχή θα αυξάνει συνεχώς.

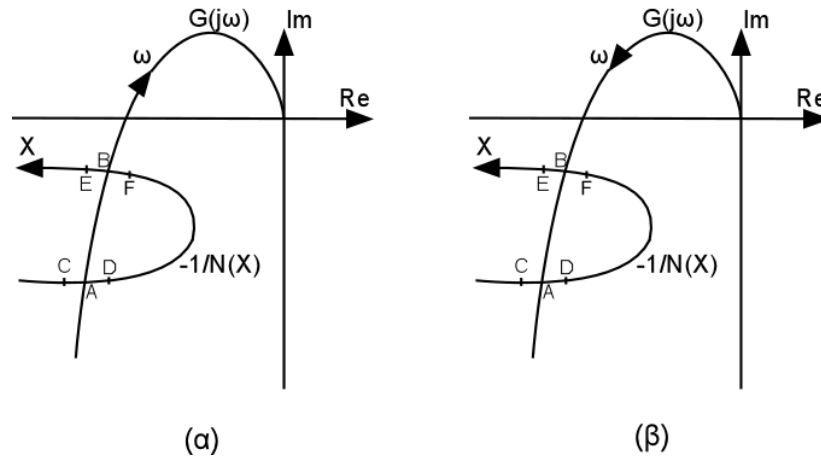
Αν οι δύο τόποι τέμνονται σε κάποιο σημείο, τότε η έξοδος του συστήματος μπορεί να παρουσιάσει L.C. Αυτό το L.C. δεν είναι ημιτονοειδές, αλλά μπορεί να προσεγγιστεί από μία ημιτονοειδή συνάρτηση. Το L.C. χαρακτηρίζεται από την τιμή του πλάτους $X_{L.C.}$ στον τόπο $-1/N$ και την τιμή της συχνότητας $\omega_{L.C.}$ στον τόπο $G(j\omega)$ στο σημείο όπου οι δύο τόποι τέμνονται.

4.2.4 Ευστάθεια L.C.

Ένα L.C. μπορεί να είναι είτε ευσταθές είτε ασταθές. Ευσταθές ονομάζεται ένα L.C. όταν μετά την εφαρμογή μιας οποιαδήποτε μικρής διαταραχής το πλάτος X και η συχνότητά του ω θα επιστρέψουν στις τιμές που είχαν πριν την εφαρμογή της διαταραχής. Αντιθέτως στην περίπτωση όπου μια μικρή διαταραχή επέφερε την συνεχή αύξηση του πλάτους του L.C. τότε ονομάζεται ασταθές.

Συγκεκριμένα, η εφαρμογή μιας μικρής διαταραχής σε ένα σύστημα το οποίο λειτουργούσε από την αρχή σε ένα σημείο του τόπου $-1/N$, έστω A , που αντιστοιχεί σε

L.C. (δηλαδή είναι σημείο τομής με τον τόπο $G(j\omega)$), προξενεί μικρή μεταβολή στο πλάτος της εισόδου στο μη γραμμικό στοιχείο. Σ' αυτήν την περίπτωση το σημείο λειτουργίας μετατοπίζεται πάνω στον τόπο $-1/N$ σε ένα άλλο σημείο.



Σχήμα 4-3. Ανάλυση ευστάθειας L.C. ενός μη γραμμικού συστήματος.

Το νέο αυτό σημείο, C ή D, βλ. Σχ. 4-3, αντιστοιχεί στο κρίσιμο σημείο ή στο σημείο $-1+j0$ του μιγαδικού επιπέδου για γραμμικά συστήματα ελέγχου. Επομένως, κατά αντίστοιχο τρόπο μπορεί να εφαρμοστεί το κριτήριο ευστάθειας του Nyquist. Συγκεκριμένα, διακρίνονται οι κάτωθι περιπτώσεις, που συνιστούν μια επέκταση του κριτηρίου του Nyquist:

- **Δεν υπάρχει περικύκλωση του νέου σημείου (C ή D) του τόπου $-1/N(X)$ από τον τόπο $G(j\omega)$.** Η περίπτωση αυτή είναι ανάλογη με εκείνη κατά την οποία δεν υπάρχει περικύκλωση του σημείου $-1+j0$ από τον τόπο της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου ενός γραμμικού συστήματος, δηλαδή $N=0$. Τότε, «το κρίσιμο σημείο κινείται προς σημεία μικρότερου πλάτους, εφ' όσον δεν υπάρχουν πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς $G(j\omega)$ στο δεξιό ημιεπίπεδο του s (δεν συμπεριλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας), δηλαδή $P=0$. Διαφορετικά, το κρίσιμο σημείο κινείται προς σημεία μεγαλύτερου πλάτους».
- **Υπάρχει ωρολογιακή περικύκλωση ή περισσότερες περικυκλώσεις του νέου σημείου (C ή D) του τόπου $-1/N(X)$ από τον τόπο $G(j\omega)$.** Η περίπτωση είναι ανάλογη με εκείνη κατά την οποία υπάρχει ωρολογιακή περικύκλωση ή περισσότερες περικυκλώσεις του κρίσιμου σημείου $-1+j0$ από τον τόπο της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου ενός γραμμικού συστήματος. Τότε, «το κρίσιμο σημείο κινείται προς σημεία μεγαλύτερου πλάτους».

πλάτους», διότι, ακόμα και αν δεν υπάρχουν πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς $G(j\omega)$ στο δεξιό ημιεπίπεδο του s ($P=0$), πάντοτε θα είναι $Z>0$.

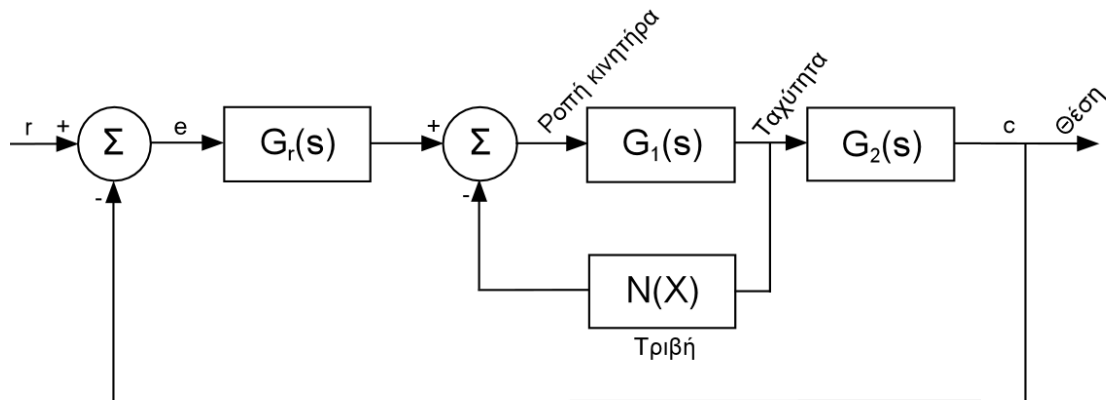
- **Υπάρχει ανθρωπολογική περικύκλωση ή περισσότερες περικυκλώσεις του νέου σημείου (C ή D) του τόπου $-1/N(X)$ από τον τόπο $G(j\omega)$.** Η περίπτωση αυτή είναι ανάλογη με εκείνη κατά την οποία υπάρχει ανθρωπολογική περικύκλωση ή περισσότερες περικυκλώσεις του κρίσιμου σημείου $-1+j0$ από τον τόπο της συνάρτησης μεταφοράς ανοιχτού βρόχου ενός γραμμικού συστήματος. Τότε, «το κρίσιμο σημείο κινείται προς σημεία μικρότερου πλάτους, εφ' όσον ο αριθμός των ανθρωπολογικών περικυκλώσεων (N , που θα είναι αρνητικός αριθμός) είναι ίδιος με τον αριθμό των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς $G(j\omega)$ στο δεξιό ημιεπίπεδο του s (P), έτσι ώστε να προκύψει $Z=N+P=0$. Διαφορετικά το κρίσιμο σημείο κινείται προς σημεία μεγαλύτερου πλάτους».

Με βάσει την επέκταση του κριτηρίου του Nyquist διαπιστώνεται ότι τα σημεία A, B του Σχ. 4-3(α) είναι σημεία εντοπισμού ενός ασταθούς και ενός ευσταθούς L.C., αντίστοιχα. Για την περίπτωση του Σχ. 4-3(β) για να καθοριστεί η ευστάθεια ή η αστάθεια των L.C. που ορίζονται από τα σημεία A, B θα πρέπει να είναι γνωστός ο αριθμός των πόλων στο δεξιό ημιεπίπεδο (P). Αν $P=1$, τότε τα σημεία A, B ορίζουν ένα ευσταθές και ένα ασταθές L.C., αντίστοιχα. Αν, όμως, $P=2$, τότε τα σημεία A, B ορίζουν δύο ασταθή L.C.

5 Η D.F.A. σε μη γραμμικά συστήματα με τριβή

Η μέθοδος ανάλυσης με περιγραφική συνάρτηση αποτελεί μία προσεγγιστική μέθοδο αποτελούμενη από μία έκφραση της σχέσης εισόδου-εξόδου του μη γραμμικού στοιχείου μιας εισόδου/μιας εξόδου με την βοήθεια της σχέσης του πλάτους και της φάσης μεταξύ της ημιτονοειδούς εισόδου και της βασικής αρμονικής συνιστώσας της εξόδου, όπως ορίστηκε στο Κεφ. 4. Αυτή η σχέση συνιστά ένα είδος συνάρτησης μεταφοράς, μπορεί να εκφραστεί από ένα μιγαδικό αριθμό, και γενικά εξαρτάται από την συχνότητα και το πλάτος. Η μέθοδος στηρίζεται στην απαίτηση ότι το στοιχείο είναι μιας εισόδου/μιας εξόδου και την υπόθεση ότι η εξέταση της βασικής αρμονικής συνιστώσας παρέχει μια λογική προσέγγιση της συμπεριφοράς του αληθινού συστήματος, βλ. [33]. Το μεγάλο πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι επιτρέπει την χρησιμοποίηση μεθόδων ανάλυσης του κλασσικού ελέγχου στο πεδίο συχνότητας.

Τα μη γραμμικά συστήματα με τριβή έχουν στην γενική περίπτωση σύστημα ελέγχου θέσης ενός βαθμού ελευθερίας, με μια ενιαία μάζα και με τριβή ολίσθησης, την κάτω μορφή:



Σχήμα 5-1. Σύστημα μιας μάζας με τριβή, η οποία μοντελοποιείται ως συνάρτηση της ταχύτητας.

Συγκρίνοντας το σύστημα του Σχ. 5-1 με το σύστημα του Σχ. 4-2 προκύπτει ότι τα συστήματα με τριβή διαφέρουν ως προς την δομή τους από εκείνα με βάση τα οποία ορίστηκε η D.F.A. στο Κεφ. 4. Γι' αυτόν τον λόγο η εφαρμογή αυτής της μεθόδου ανάλυσης σε συστήματα με τριβή γίνεται με διαφορετικό τρόπο και συγκεκριμένα με δύο διαφορετικές τεχνικές. Οι τεχνικές αυτές διαφέρουν ως προς τον τρόπο με τον οποίο μοντελοποιούν την μη γραμμικότητα του συστήματος, δηλαδή την τριβή, και είναι οι εξής:

- "the memoryless element construction" (M.E.C.)

□ “the integrated friction/plant construction” (I.F.P.C.)

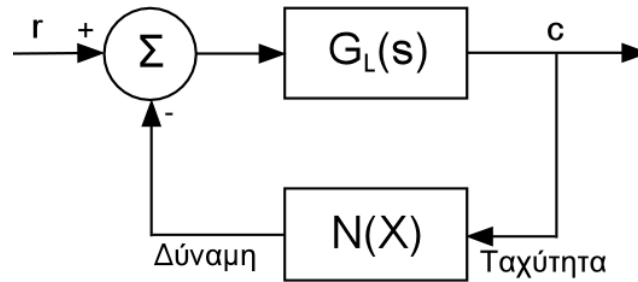
Ειδικότερα, η πρώτη χρησιμοποιεί μια ειδική περίπτωση στην μελέτη των D.F. που είναι η συνάρτηση χωρίς κατάσταση (the memoryless, odd function—M.O.F.). Ένα “memoryless element” είναι ένα στοιχείο χωρίς κατάσταση, και για ένα τέτοιο, η D.F. εξαρτάται αποκλειστικά από το πλάτος της εισόδου. Όταν η συνάρτηση είναι “odd” (η τριβή ως συνάρτηση της ταχύτητας, με συμμετρική τριβή στην αριστερή και δεξιά κατεύθυνση, είναι μία M.O.F.), η D.F. θα είναι αυστηρά πραγματική, βλ. [33]. Σύγχρονοι ερευνητές έχουν επωφεληθεί από αυτήν την ειδική περίπτωση, την οποία ονομάζουν M.E.C.

Παλαιότεροι ερευνητές σχημάτιζαν την D.F. του συνδυασμού της εγκατάστασης με την τριβή. Αυτή η κατασκευή δεν είναι “memoryless” επειδή έτσι τοποθετείται η κατάσταση της εγκατάστασης μέσα στο μοντελοποιημένο μη γραμμικό στοιχείο, οπότε ονομάζεται I.F.P.C.

Στην ανάλυση των συστημάτων που θα μελετηθούν θα χρησιμοποιηθεί η πρώτη από τις δύο τεχνικές που περιγράφηκαν παραπάνω. Ο βασικότερος λόγος είναι η απλότητα στην αντιμετώπιση του προβλήματος που χαρακτηρίζει την πρώτη τεχνική σε σύγκριση με την δεύτερη. Ειδικότερα, η πρώτη τεχνική μπορεί να εφαρμοστεί κατευθείαν. Αντίθετα κατά την δεύτερη τεχνική απαιτείται ο ορισμός ενός μη γραμμικού κομματιού στο σύστημα, το οποίο θα περιλαμβάνει το μη γραμμικό στοιχείο καθώς και το γραμμικό κομμάτι του συστήματος που συνδέεται παράλληλα στο δομικό διάγραμμα με το μη γραμμικό στοιχείο. Για παράδειγμα, στην γενική περίπτωση δομικού διαγράμματος με τριβή που εικονίζεται στο Σχ. 5-1, το μη γραμμικό κομμάτι θα αποτελείται από την γραμμική συνάρτηση μεταφοράς $G_1(s)$ και την D.F. $N(X)$. Γι’ αυτό το κομμάτι θα πρέπει να οριστεί μια συνολική D.F., πράγμα που για να γίνει απαιτούνται αρκετές μαθηματικές πράξεις. Χάριν, επομένως, απλότητας θα ακολουθηθεί η πρώτη τεχνική.

5.1 Η τεχνική της “memoryless element describing function” (M.E.D.F.)

Κατά την τεχνική αυτή, το δομικό διάγραμμα πρέπει να χρησιμοποιηθεί, έτσι ώστε όλα τα γραμμικά στοιχεία να οργανωθούν σαν ένα σύνολο, αφήνοντας το μη γραμμικό στοιχείο ως ένα δεύτερο σύνολο, δίνοντας μ’ αυτόν τον τρόπο στο δομικό διάγραμμα την μορφή του ακόλουθου σχήματος:



Σχήμα 5-2. Το δομικό διάγραμμα ενός συστήματος μιας μάζας με τριβή μετά τον χωρισμό του γραμμικού από το μη γραμμικό κομμάτι.

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η εξής:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_r \frac{G_1}{1+G_r G_1 G_2} G_2}{1 + N(X) \left(\frac{G_1}{1+G_r G_1 G_2} \right)} \quad (5-1)$$

Η κίνηση S.S. (δηλαδή η περιοδική μετάβαση από την προσκόλληση στην ολίσθηση) που εμφανίζεται σε συστήματα με τριβή είναι ένα L.C., δηλαδή μια κίνηση που δίνει κλειστή πορεία στο P.P. Ένα L.C. μπορεί να είναι είτε ευσταθές, που σημαίνει ότι γειτονικές πορείες συγκλίνουν σ' αυτό, είτε ασταθές που σημαίνει ότι γειτονικές πορείες δεν συγκλίνουν σ' αυτό, αλλά δεν υπαινίσσεται ότι το σύστημα είναι εκθετικά ασταθές. Χρησιμοποιώντας την D.F., ένα L.C. παρατηρείται όταν υπάρχει ένα πλάτος, X , και μία συχνότητα, ω , τέτοια ώστε ο παρονομαστής της Εξ. (5-1) να γίνεται μηδέν, δίνοντας:

$$-\frac{1}{N(X)} = \frac{G_1}{1+G_r G_1 G_2} \quad (5-2)$$

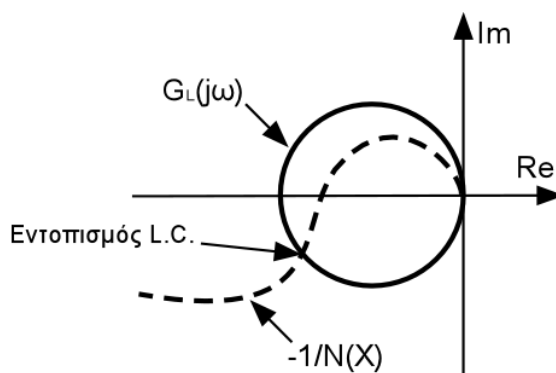
ή αναφερόμενοι στο Σχ. 5-2:

$$-\frac{1}{N(X)} = G_L(s) \quad (5-3)$$

με:

$$G_L(s) = \frac{G_1}{1+G_r G_1 G_2} \quad (5-4)$$

Αυτή η συνθήκη μπορεί να εξεταστεί εύκολα σχεδιάζοντας το διάγραμμα Nyquist, με το $-1/N(X)$ σαν τον ένα κλάδο, και το $G_L(s)$ σαν τον δεύτερο κλάδο, όπως ακριβώς φαίνεται στο Σχ. 5-3. Μία τομή προβλέπει ένα L.C.



Σχήμα 5-3. Διάγραμμα Nyquist για τον εντοπισμό “limit cycle”.

5.2 Η M.E.D.F. σε συστήματα 2^{ης} και άνω τάξης με τριβή

5.2.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε κατά τον ορισμό της D.F.A., βλ. Παρ. 4.2.2, αν και η μέθοδος είναι αρκετά απλή στη εφαρμογή της, ωστόσο είναι προσεγγιστική και μπορεί να ισχύσει μόνον με προϋποθέσεις. Επομένως ανακύπτουν δύο σημαντικά ερωτήματα που θα ήταν πολύ ενδιαφέρον να απαντηθούν και τα οποία είναι τα εξής:

- Σε ποιες περιπτώσεις αναμένεται η εμφάνιση L.C., δηλαδή του φαινομένου S.S., σε συστήματα με τριβή;
- Ποιες είναι οι προϋποθέσεις εκείνες κάτω από τις οποίες η εφαρμογή της μεθόδου μπορεί να οδηγήσει σε ικανοποιητικά ποσοτικά αποτελέσματα όσον αφορά τα χαρακτηριστικά του L.C. (πλάτος, συχνότητα);

Σε ερωτήματα ανάλογα με τα δύο παραπάνω έχουν προσπαθήσει να απαντήσουν πολλοί μέχρι σήμερα, και τα συμπεράσματα που έχουν προκύψει είναι αρκετά σημαντικά. Ενδεικτικά παρατίθενται ορισμένα από αυτά:

- **Wallenborg-Aström**, βλ. [93]. Παρουσίασαν μια αρκετά ενδιαφέρουσα απόδειξη ότι ένα σύστημα με τριβή Coulomb (χωρίς στατική τριβή) και ανάδραση μεταβλητών κατάστασης μπορεί να είναι ασταθές μόνο στην ειδική περίπτωση ενός ασταθούς ελεγκτή.
- **Amin**, βλ. [10]. Μελέτησε την τριβή Coulomb και την τριβή Coulomb συν στατική τριβή με την M.E.C. και την I.F.P.C. στην περίπτωση ενός συστήματος μιας μάζας και PID ελέγχου. Έβγαλε όλες τις προβλέψεις της D.F.A. για όλους τους συνδυασμούς πιθανών τιμών των παραμέτρων, και συνέκρινε αυτά με τα αναλυτικά αποτελέσματα. Επίσης έδειξε ότι για την περίπτωση ενός συστήματος μιας μάζας και με PID έλεγχο, η M.E.C. θα

προβλέπει S.S. αν και μόνον αν το σύστημα χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής είναι ασταθές.

- **Canudas de Wit et al.**, βλ. [34]. Χρησιμοποίησε τις D.F. για να μελετήσει τη συμπεριφορά των προσαρμόστικων συστημάτων (adaptive systems) στην παρουσία αρνητικής ιξώδους τριβής και βρήκε ότι η υπέρ-αντιστάθμιση μπορεί να οδηγήσει σε αστάθεια.
- **Branderburg-Schäfer**, βλ. [29], [30], [32]. Εφάρμοσαν τις D.F. στην περίπτωση της ολίσθησης μιας κατεύθυνσης (unidirectional sliding) με τοπική γραμμικοποίηση της καμπύλης Stribeck και εφαρμογή του κριτηρίου ευστάθειας του Popov.
- **Branderburg, Branderburg-Schäfer, Townsend-Salisbury**, βλ. [28], [29], [92], αντίστοιχα. Μαζί δημοσίευσαν εκτεταμένες προσομοιώσεις οι οποίες έγιναν για να επιβεβαιώσουν τις προβλέψεις της D.F.A., αναγνωρίζοντας εμμέσως ότι η ανάλυση αυτή προσθέτει ένα επίπεδο προσέγγισης πάνω-κάτω από τις προβλέψεις που έχουν ήδη γίνει στο ίδιο το μοντέλο. Οι Townsend-Salisbury έχουν διατυπώσει, βλ. [92], το εξής: «Οι δυναμικές προσομοιώσεις έδειξαν ότι οι προβλέψεις της D.F.A. μιας εισόδου και μιας εξόδου για τριβή Coulomb είναι ποιοτικά χρήσιμες ωστόσο ποσοτικά ανακριβείς. Οι προβλέψεις για την περίπτωση της στατικής τριβής γίνονται ακόμα και ποιοτικά ανακριβείς». Οι Branderburg-Schäfer, οι οποίοι έκαναν μία εκτεταμένη σειρά από μελέτες σε ένα σύστημα με δύο μάζες, ευλύγιστο και με ανάδραση πολλαπλών βρόχων, ισχυρίστηκαν ότι τα αποτελέσματα της D.F.A. ποιοτικά συμφωνούν με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για την περίπτωση της τριβής Coulomb και της κίνησης μιας κατεύθυνσης, άλλα αποτυγχάνει ουσιαδώς στις περιπτώσεις της τριβής Coulomb+στατικής τριβής ή του ολοκληρωτικού ελέγχου, βλ. [28], [29], [30], [31], [86], [87].
- **Armstrong H elouvry-Amin**, βλ. [16], [18]. Σε μία προσπάθεια σύγκρισης της D.F.A. και της A.A. καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι στην περίπτωση PID ελέγχου με τριβή Coulomb ή με τριβή Coulomb+στατική, η M.E.C. δεν μπορεί να δώσει μία βάσιμη πρόβλεψη για το πότε θα συμβεί S.S. Στην περίπτωση της I.P.F.C. πάντα μπορεί να προβλέπει πότε συμβαίνει L.C. στην περίπτωση της τριβής Coulomb, ενώ σε ορισμένες μόνο περιπτώσεις στην περίπτωση της τριβής Coulomb+στατικής. Επίσης, η A.A. μπορεί και προβλέπει πάντοτε την δημιουργία L.C. στην περίπτωση της τριβής

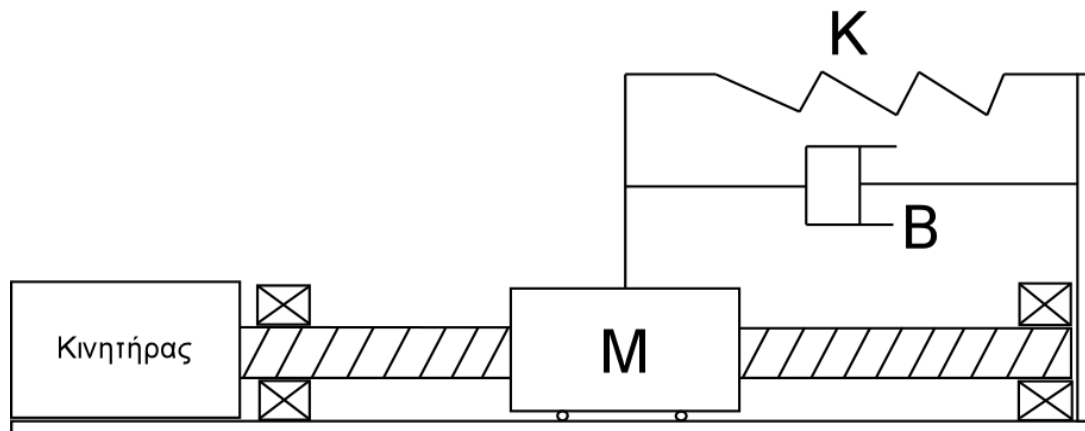
Coulomb+στατικής, ενώ δεν προβλέπει ποτέ L.C. στην περίπτωση της τριβής Coulomb.

Με βάσει τις προηγούμενες παρατηρήσεις ελέγχθηκε πότε προβλέπεται η εμφάνιση L.C. με την βοήθεια της M.E.D.F. σε συστήματα διαφόρων τάξεων με τριβή Coulomb+ιξώδη και κατά δεύτερον αν οι τιμές του πλάτους και της συχνότητας του L.C. που προβλέπεται από την μέθοδο αυτή είναι ακριβείς. Για την επίτευξη του δεύτερου στόχου έγιναν εκτεταμένες προσομοιώσεις με την βοήθεια του Matlab/Simulink.

5.2.2 Συστήματα 2^{ης} τάξης με PD έλεγχο

5.2.2.1 Μοντελοποίηση

Έστω ένα σύστημα 2^{ης} τάξης, μιας μάζας, το οποίο μπορεί να ολισθαίνει πάνω σε ένα επίπεδο όταν του ασκηθεί μια εξωτερική οριζόντια δύναμη. Θα υποθεθεί ότι η δύναμη αυτή ασκείται από έναν κινητήρα που είναι άμεσα συνδεδεμένος με το σώμα αυτό (π.χ. μέσω ενός κοχλία-οδηγού), βλ. Σχ. 5-4.



Σχήμα 5-4. Σύστημα 2^{ης} τάξης, μιας μάζας με ελατήριο και αποσβεστήρα.

Το σύστημα του Σχ. 5-4 διέπεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$J\ddot{\theta} = T_m - B\dot{\theta} - K\theta - T_f \quad (5-5)$$

όπου:

J η ροπή αδράνειας της κινούμενης μάζας, M , και των περιστρεφόμενων τμημάτων του συστήματος ως προς τον άξονα του κοχλία-οδηγού,

T_m η ροπή του κινητήρα,

B το στοιχείο απόσβεσης,

K η σταθερά του ελατηρίου,

- T_f η ροπή της δύναμης τριβής,
 θ η γωνιακή μετατόπιση,
 $\dot{\theta}$ η γωνιακή ταχύτητα,
 $\ddot{\theta}$ η γωνιακή επιτάχυνση.

Έστω ότι η τριβή περιγράφεται από το κλασσικό μοντέλο τριβής, σύμφωνα με το οποίο:

$$T_f = b\dot{\theta} + T_c \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) \quad (5-6)$$

όπου:

- b ο συντελεστής ιξώδους τριβής,
 T_c η ροπή της τριβής Coulomb.

Αν ο κινητήρας θεωρηθεί τμήμα αυτού του συστήματος, τότε διακρίνονται οι ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

(α) Έλεγχος με πηγή τάσης

Σ' αυτήν την περίπτωση, ο κινητήρας διέπεται από την εξίσωση:

$$\begin{cases} V_s(t) = L \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_T \dot{\theta} \\ T_m = K_T i_a \end{cases} \quad (5-7)$$

όπου:

- $V_s(t)$ η συνεχής τάση τροφοδοσίας του DC κινητήρα,
 L η αυτεπαγωγή των τυλιγμάτων του δρομέα του DC κινητήρα,
 R_a η αντίσταση των τυλιγμάτων του δρομέα του DC κινητήρα,
 K_T η σταθερά ροπής του DC κινητήρα,
 i_a το ρεύμα στα τυλίγματα του δρομέα του DC κινητήρα,

Αν θεωρηθεί αμελητέα η επίδραση της αυτεπαγωγής, L , των τυλιγμάτων του δρομέα, τότε η Εξ. (5-7) γράφεται:

$$\begin{cases} V_s(t) = R_a i_a + K_T \dot{\theta} \\ T_m = K_T i_a \end{cases} \quad (5-8)$$

Η συνολική διαφορική εξίσωση του συστήματος προκύπτει από τις Εξ. (5-5), (5-6), (5-8) και είναι η ακόλουθη:

$$J\ddot{\theta} = K_r \frac{V_s(t) - K_r \dot{\theta}}{R_a} - B\dot{\theta} - K\theta - b\dot{\theta} - T_c \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) \quad (5-9)$$

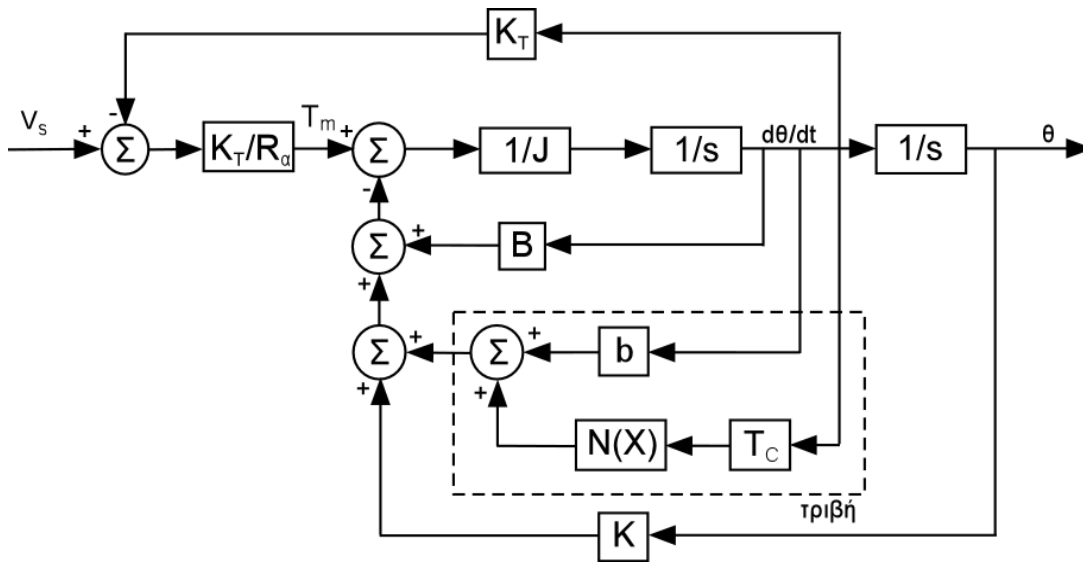
Για τον προσδιορισμό της παράστασης του συστήματος στο διάστημα κατάστασης, εκλέγονται ως μεταβλητές κατάστασης οι εξής:

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases} \quad (5-10)$$

οπότε ισοδύναμα προκύπτει ότι:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{J} \left[\frac{K_r}{R_a} (V_s(t) - K_r \dot{\theta}) - (B+b)\dot{\theta} - K\theta - T_c \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) \right] \end{cases} \quad (5-11)$$

Με την βοήθεια της Εξ. (5-11) δημιουργείται το δομικό διάγραμμα του συστήματος, το οποίο φαίνεται στο Σχ. 5-5.

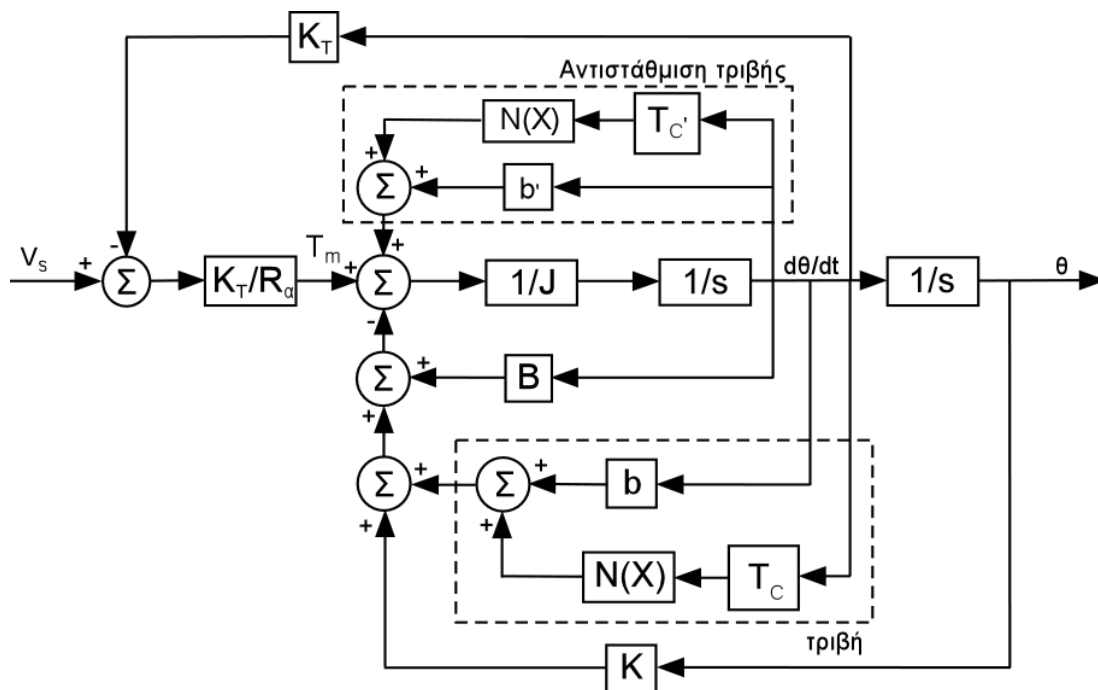


Σχήμα 5-5. Δομικό διάγραμμα του συστήματος 2^{ης} τάξης με πηγή τάσης.

όπου:

$$N(X) = \frac{Y_1}{X} \angle 0^\circ = \frac{4M}{\pi X} \quad \text{η D.F. της "on-off" μη γραμμικότητας.}$$

Προκειμένου να αντισταθμιστεί η επίδραση της τριβής στην απόκριση του συστήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα μοντέλο τριβής (π.χ. το κλασικό μοντέλο Coulomb+εξώδης τριβή), αφού πρώτα έχουν προσδιοριστεί πειραματικά οι παράμετροί του, Σχ. 5-6.



Σχήμα 5-6. Δομικό διάγραμμα του γενικού συστήματος 2^{ης} τάξης με πηγή τάσης και με αντιστάθμιση τριβής.

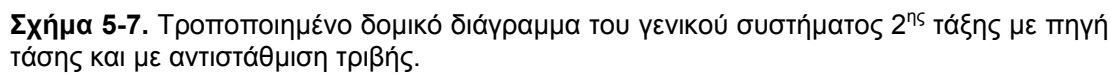
Σκοπός της χρησιμοποίησης ως μοντέλο αντιστάθμισης του ίδιου μοντέλου με εκείνο που χρησιμοποιήθηκε για την τριβή της εγκατάστασης αποτελεί η εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων στην περίπτωση όπου υπάρχει και αντιστάθμιση. Το μοντέλο τριβής δίνει μία εκτίμηση της δύναμης τριβής χρησιμοποιώντας είτε την μετρούμενη είτε την εκτιμώμενη τιμή της ταχύτητας, οπότε μιλάμε για “feedback friction compensation” και “feed-forward friction compensation”, αντίστοιχα. Έστω ότι η τιμή της ταχύτητας η οποία χρειάζεται για να υπολογιστεί η δύναμη αντιστάθμισης θα δοθεί με ανάδραση της ταχύτητας της μάζας (feedback friction compensation).

Αν τεθεί:

$\Delta b = b - b'$ η διαφορά της εκτίμησης της τιμής του συντελεστή ιξώδους τριβής b' από την πραγματική του τιμή b ,

$\Delta T_c = T_c - T'_c$ η διαφορά της εκτίμησης της τιμής της τριβής Coulomb T'_c από την πραγματική της τιμή T_c .

τότε, το δομικό διάγραμμα του Σχ. 5-6 μπορεί να μετασχηματιστεί στο ακόλουθο:


$$G_{plant,v} = \frac{K_T}{(R_a \cdot J) \cdot s^2 + \left(B + \Delta b + \Delta T_c \cdot N(X) + \frac{K_T^2}{R_a} \right) \cdot R_a \cdot s + K \cdot R_a} \quad (5-12)$$

Σ' αυτήν την περίπτωση, ο κινητήρας διέπεται από την εξίσωση:

Ο έλεγχος της έντασης του ρεύματος στην είσοδο του κινητήρα θα μπορούσε να επιτευχθεί με την χρησιμοποίηση ενός ενισχυτή εύρους παλμού (PWM), ο οποίος δίνει στην έξοδο του ρεύμα ανάλογης έντασης με την τάση ρεύματος της εισόδου του. Αν υποθεθεί ότι K_{amp} είναι ο λόγος της έντασης ρεύματος της εξόδου, i_a , προς την τάση ρεύματος της εισόδου, V_{κ} , τότε:

Η συνολική διαφορική εξίσωση του συστήματος προκύπτει από τις Εξ. (5-5), (5-6), (5-13), (5-14), και είναι η ακόλουθη:

83

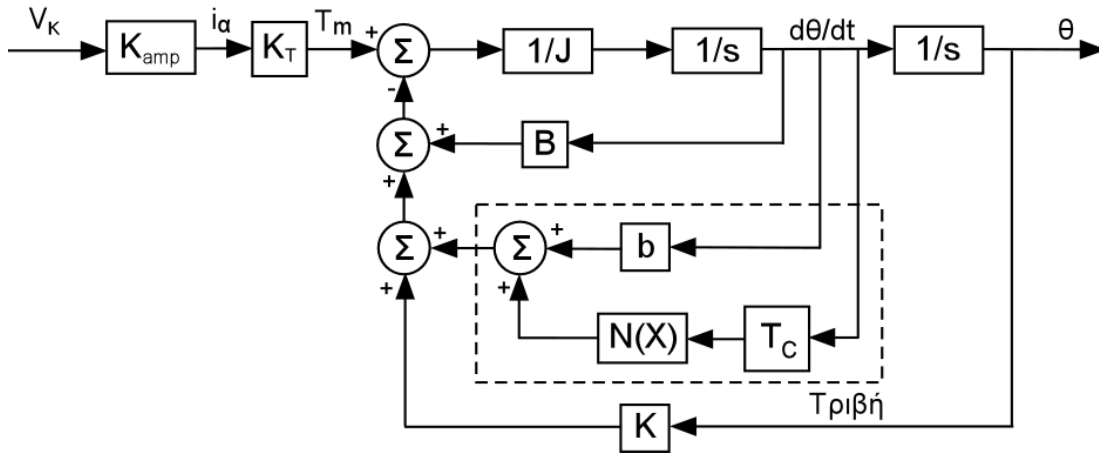
Για τον προσδιορισμό της παράστασης του συστήματος στο διάστημα κατάστασης, εκλέγονται ως μεταβλητές κατάστασης οι:

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases} \quad (5-16)$$

οπότε ισοδύναμα προκύπτει:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{J} \left[V_K K_{amp} K_T - (B+b)\dot{\theta} - K\theta - T_c \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) \right] \end{cases} \quad (5-17)$$

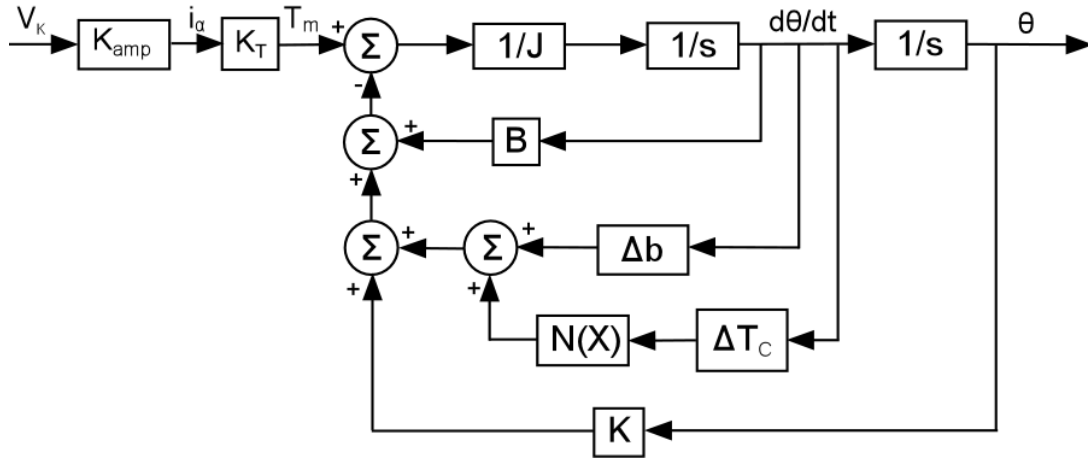
Με την βοήθεια της εξίσωσης (5-17) δημιουργείται το δομικό διάγραμμα του συστήματος, το οποίο φαίνεται στο Σχ. 5-8.



Σχήμα 5-8. Δομικό διάγραμμα του συστήματος 2^{ης} τάξης με πηγή ρεύματος.

Αν αντισταθμιστεί η τριβή χρησιμοποιώντας το κλασσικό μοντέλο τριβής (Coulomb+ιξώδη τριβή), το δομικό διάγραμμα του συστήματος θα δίνεται από το Σχ. 5-9. Από το δομικό διάγραμμα του Σχ. 5-9 προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, η οποία είναι η εξής:

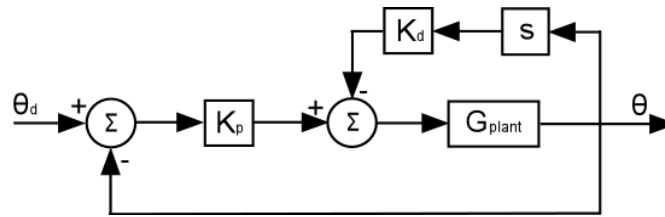
$$G_{plant,i} = \frac{1}{Js^2 + [\Delta b + B + \Delta T_c N(X)]s + K} \quad (5-18)$$



Σχήμα 5-9. Τροποποιημένο δομικό διάγραμμα του γενικού συστήματος 2^{ης} τάξης με πηγή ρεύματος και με αντιστάθμιση τριβής.

5.2.2.2 Προσθήκη PD κατευθυντή

Αν στο σύστημα του Σχ. 5-7 ή του 5-9 προστεθεί ένας PD κατευθυντής, τότε προκύπτει το σύστημα:



Σχήμα 5-10. Δομικό διάγραμμα του συστήματος 2^{ης} τάξης μετά την προσθήκη του PD κατευθυντή.

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος του Σχ. 5-10 δίνεται από την εξίσωση:

$$G_{total} = \frac{K_p G_{plant}}{1 + K_d G_{plant} s + K_p G_{plant}} \quad (5-19)$$

και η χαρακτηριστική εξίσωση από την εξίσωση:

$$1 + K_d G_{plant} s + K_p G_{plant} = 0 \quad (5-20)$$

ή ισοδύναμα από την εξίσωση:

$$G_{plant} = -\frac{1}{K_p + K_d s} \quad (5-21)$$

(α) Έλεγχος με πηγή τάσης

Από τις Εξ. (5-12), (5-19) προκύπτει ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος για την περίπτωση του ελέγχου με πηγή τάσης είναι η εξής:

$$G_{total,v} = \frac{K_p K_T}{(R_a J)s^2 + [BR_a + \Delta b R_a + \Delta T_c R_a N(X) + K_T^2 + K_T K_d]s + (K_T K_p + K R_a)} \quad (5-22)$$

και η χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\frac{K_T}{(R_a J)s^2 + [BR_a + \Delta b R_a + \Delta T_c R_a N(X) + K_T^2]s + K R_a} = -\frac{1}{K_p + K_d s} \quad (5-23)$$

(β) Έλεγχος με πηγή ρεύματος

Από τις Εξ. (5-18), (5-19) προκύπτει ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος για την περίπτωση του ελέγχου με πηγή ρεύματος είναι η εξής:

$$G_{total,i} = \frac{K_p K_{amp} K_T}{Js^2 + (\Delta b + B + \Delta T_c N(X) + K_d K_{amp} K_T)s + (K_p K_{amp} K_T + K)} \quad (5-24)$$

και η χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\frac{K_{amp} K_T}{Js^2 + [\Delta b + B + \Delta T_c N(X)]s + K} = -\frac{1}{K_p + K_d s} \quad (5-25)$$

5.2.2.3 Εφαρμογή της M.E.D.F.

(α) Έλεγχος με πηγή τάσης

Απομονώνοντας το μη γραμμικό τμήμα του συστήματος, που εκφράζεται από την “on-off” D.F., $N(X)$, η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος, Εξ. (5-23), γράφεται:

$$-\frac{1}{N(X)} = \frac{(\Delta T_c R_a)s}{(R_a J)s^2 + (BR_a + \Delta b R_a + K_T^2 + K_T K_d)s + (K_T K_p + K R_a)} \quad (5-26)$$

Αν τεθεί:

$$G_L(s) = \frac{(\Delta T_c R_a)s}{(R_a J)s^2 + (BR_a + \Delta b R_a + K_T^2 + K_T K_d)s + (K_T K_p + K R_a)} \quad (5-27)$$

τότε, η Εξ. (5-26) γράφεται:

$$-\frac{1}{N(X)} = G_L(s) \quad (5-28)$$

με:

$$N(X) = \frac{4}{\pi X} \quad (5-29)$$

όπως έχει υπολογιστεί στο [73].

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (5-27) το s με το $j\omega$ προκύπτει:

$$G_L(j\omega) = \frac{(\Delta T_c R_a \omega) j}{(K_T K_p + K R_a - R_a J \omega^2) + [(B R_a + \Delta b R_a + K_T^2 + K_T K_d) \omega] j} \quad (5-30)$$

Αν τεθεί:

$$\begin{aligned} A &= \Delta T_c R_a \omega \\ B &= K_T K_p + K R_a - R_a J \omega^2 \\ C &= (B R_a + \Delta b R_a + K_T^2 + K_T K_d) \omega \end{aligned} \quad (5-31)$$

τότε, η Εξ.(5-30) γράφεται:

$$G_L(j\omega) = \frac{AC}{B^2 + C^2} - \frac{AB}{B^2 + C^2} j \quad (5-32)$$

Για να εντοπιστεί L.C. θα πρέπει, σύμφωνα με τις Εξ. (5-28), (5-29), η εξίσωση:

$$G_L(j\omega) = -\frac{\pi X}{4} \quad (5-33)$$

να έχει λύση. Δεδομένου, όμως, ότι το πλάτος του L.C. είναι $X > 0$, για να έχει λύση η Εξ. (5-33) θα πρέπει, σύμφωνα με την Εξ. (5-32), να ισχύει:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{G_L(j\omega)\} < 0 \\ \operatorname{Im}\{G_L(j\omega)\} = 0 \end{cases} \quad (5-34)$$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{cases} A \cdot C < 0 \\ A \cdot B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{A} > 0, C < 0 \\ \dot{A} < 0, C > 0 \\ A = 0 \\ \dot{A} > 0 \\ B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta T_c R_a \omega < 0, [R_a(B + \Delta b) + K_T(K_T + K_d)] > 0 \\ \Delta T_c R_a \omega > 0, [R_a(B + \Delta b) + K_T(K_T + K_d)] < 0 \\ \Delta T_c R_a \omega = 0 \\ \dot{A} > 0 \\ K_T K_p + K R_a - R_a J \omega^2 = 0 \end{cases} \quad (5-35)$$

Επειδή, όμως, ισχύει $R_a \omega > 0$, οι συνθήκες της Εξ. (5-35) ισοδύναμα γράφονται:

$$\begin{cases} \Delta T_c < 0, [R_a(B + \Delta b) + K_T(K_T + K_d)] > 0 \\ \dot{A} > 0 \\ \Delta T_c > 0, [R_a(B + \Delta b) + K_T(K_T + K_d)] < 0 \\ \omega = \sqrt{\frac{K_T K_p + K R_a}{R_a J}} \end{cases} \quad (5-36)$$

Επομένως, L.C. θα εμφανιστεί αν και μόνον αν ισχύει:

$$\begin{cases} \Delta T_c < 0, [R_a(B + \Delta b) + K_T(K_T + K_d)] > 0 \\ \dot{\eta} \\ \Delta T_c > 0, [R_a(B + \Delta b) + K_T(K_T + K_d)] < 0 \end{cases} \quad (5-37)$$

Δεδομένου ότι το συνολικό σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς που δίνεται από την Εξ. (5-22), το ίδιο σύστημα χωρίς όμως την μη γραμμικότητα της τριβής θα έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$G_{linear}(s) = \frac{K_p K_T}{(R_a J) \cdot s^2 + (BR_a + \Delta b R_a + K_T^2 + K_T K_d) \cdot s + (K_T K_p + K R_a)} \quad (5-38)$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο ευστάθειας γραμμικών συστημάτων των Routh-Harwitz στο σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς που δίνεται από την Εξ. (5-22), προκύπτει ότι για να είναι το σύστημα αυτό ευσταθές θα πρέπει να ισχύουν τα εξής:

$$\begin{cases} R_a J > 0 \\ BR_a + \Delta b R_a + K_T^2 + K_T K_d > 0 \Leftrightarrow BR_a + \Delta b R_a + K_T^2 + K_T K_d > 0 \\ K_T K_p + K R_a > 0 \end{cases} \quad (5-39)$$

Συγκρίνοντας τις συνθήκες εμφάνισης L.C., Εξ. (5-37) με την συνθήκη ευστάθειας του συνολικού συστήματος χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής, Εξ. (5-39), προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

Συμπέρασμα 5-1:

Σε ένα σύστημα 2^{ης} τάξης, μιας μάζας, με τριβή που δίνεται από το κλασσικό μοντέλο τριβής (Coulomb+εξώδη τριβή), με έλεγχο τάσης και με PD κατευθυντή, αν δεν υπάρχει αντιστάθμιση της τριβής, δηλαδή $\Delta T_c = T_c > 0$, ή αν υπάρχει αντιστάθμιση της τριβής χρησιμοποιώντας το κλασσικό μοντέλο τριβής, με $\Delta T_c > 0$, L.C. θα εμφανιστεί αν και μόνον αν το συνολικό σύστημα χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής είναι ασταθές.

Το συμπέρασμα 5-1 ταυτίζεται με την διαπίστωση του Amin, βλ. Παρ. 5.2.1.

Συμπέρασμα 5-2:

Σε ένα σύστημα 2^{ης} τάξης, μιας μάζας, με τριβή που δίνεται από το κλασσικό μοντέλο τριβής (Coulomb+εξώδη τριβή), με έλεγχο τάσης και με PD κατευθυντή, αν υπάρχει αντιστάθμιση της τριβής χρησιμοποιώντας το κλασσικό μοντέλο τριβής, με $\Delta T_c < 0$, L.C. θα εμφανιστεί αν και μόνον αν το συνολικό σύστημα χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής είναι ευσταθές.

Δεδομένου ότι πάντοτε τα κέρδη του PD κατευθυντή είναι θετικοί αριθμοί από τα συμπεράσματα 5-1, 5-2 προκύπτουν οι κάτωθι περιπτώσεις:

Πίνακας 5-1. Χάρτης εντοπισμού L.C. σε σύστημα 2^{ης} τάξης, μιας μάζας, με τριβή Coulomb+ιξώδη, με έλεγχο τάσης και PD κατευθυντή.

	$\Delta b > 0$	$\Delta b < 0$
$\Delta T_c > 0$	Δεν προβλέπεται να εμφανιστεί L.C..	Προβλέπεται να εμφανιστεί L.C. όταν: $K_d < \frac{-\Delta b R_a - K_T^2 - B R_a}{K_T}$
$\Delta T_c < 0$	Προβλέπεται να εμφανιστεί L.C.	Προβλέπεται να εμφανιστεί L.C. όταν: $K_d > \frac{-\Delta b R_a - K_T^2 - B R_a}{K_T}$

Από τον Πίν. 5-1 προκύπτει ότι υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες ο εντοπισμός L.C. είναι αναπόφευκτος και περιπτώσεις στις οποίες μπορεί να αποφευχθεί. Αυτό συμβαίνει διότι ο εντοπισμός L.C., σύμφωνα με την Εξ. (5-39) και υποθέτοντας ότι τα στοιχεία του συστήματος είναι σταθερά εκτός των κερδών του κατευθυντή, εξαρτάται μόνο από το κέρδος K_d , δηλαδή μόνο από μία ανεξάρτητη, θετική μεταβλητή. Αν αντιθέτως υπήρχε εξάρτηση και από το άλλο κέρδος του κατευθυντή K_p , τότε σε κάθε περίπτωση ο εντοπισμός L.C. θα μπορούσε να αποφευχθεί. Συνοψίζοντας, ισχύει το ακόλουθο συμπέρασμα:

Συμπέρασμα 5-3:

Σε ένα σύστημα 2^{ης} τάξης, μιας μάζας, με τριβή που δίνεται από το κλασσικό μοντέλο τριβής (Coulomb+ιξώδη τριβή), με έλεγχο τάσης και με PD κατευθυντή, αν υπάρχει αντιστάθμιση της τριβής χρησιμοποιώντας το κλασσικό μοντέλο τριβής, ο εντοπισμός L.C. εξαρτάται μόνο από μία ανεξάρτητη, θετική μεταβλητή (το κέρδος K_d του κατευθυντή), με αποτέλεσμα να υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες να μην μπορεί να αποφευχθεί.

(β) Έλεγχος με πηγή ρεύματος

Με βάσει την χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος, βλ. Εξ. (5-25), και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την περίπτωση του ελέγχου με πηγή τάσης προκύπτουν οι περιπτώσεις εντοπισμού L.C. που παρατίθενται στον Πίν. 5-2.

Επίσης, ισχύουν τα ίδια ακριβώς συμπεράσματα που προέκυψαν για την περίπτωση του ελέγχου με πηγή τάσης, συμπεράσματα 5-1, 5-2, 5-3.

Πίνακας 5-2. Χάρτης εντοπισμού L.C. σε σύστημα 2^{ης} τάξης, μιας μάζας, με τριβή Coulomb+ιξώδη, με έλεγχο ρεύματος και PD κατευθυντή.

	$\Delta b > 0$	$\Delta b < 0$
$\Delta T_c > 0$	Δεν προβλέπεται να εμφανιστεί L.C..	Προβλέπεται να εμφανιστεί L.C. όταν: $K_d < \frac{-\Delta b - B}{K_{amp} K_T}$
$\Delta T_c < 0$	Προβλέπεται να εμφανιστεί L.C.	Προβλέπεται να εμφανιστεί L.C. όταν: $K_d > \frac{-\Delta b - B}{K_{amp} K_T}$

5.2.2.4 Ακρίβεια προσδιορισμού των χαρακτηριστικών του L.C.

(α) Έλεγχος με πηγή τάσης

Όπως βρέθηκε στην Παρ. 4.1.2 κατά την εφαρμογή της D.F.A. οι τιμές των χαρακτηριστικών του L.C. (πλάτος και συχνότητα), εφ' όσον προβλέπεται να εμφανιστεί (πράγμα που σημαίνει ότι θα ισχύει και $\Delta T_c \neq 0 \Leftrightarrow X \neq 0$) υπολογίζονται από τις Εξ. (5-32), (5-33), ως εξής:

$$G_L(j\omega) = -\frac{\pi X}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}\{G_L(j\omega)\} = -\frac{\pi X}{4} \\ \operatorname{Im}\{G_L(j\omega)\} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AC}{B^2 + C^2} = -\frac{\pi X}{4} \\ A \cdot B = 0 \end{cases} \quad (5-40)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{AC}{B^2 + C^2} \\ B = 0 \end{cases} \quad (5-41)$$

οπότε προκύπτει ότι:

$$\begin{cases} X = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{(\Delta T_c R_a \omega) \cdot [(BR_a + \Delta b R_a + K_T^2 + K_T K_d) \cdot \omega]}{\pi \left((K_T K_p + K R_a - R_a J \omega^2)^2 + [(BR_a + \Delta b R_a + K_T^2 + K_T K_d) \cdot \omega]^2 \right)} \\ \omega = \sqrt{\frac{K_T K_p + K R_a}{R_a J}} \end{cases} \quad (5-42)$$

Άρα, η συχνότητα και το πλάτος του L.C. δίνονται από την εξίσωση:

$$\begin{cases} X_{L.C.} = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\Delta T_c}{B + \Delta b + \frac{K_T}{R_a} \cdot (K_T + K_d)} \\ \omega_{L.C.} = \sqrt{\frac{K_T K_p + K R_a}{R_a J}} \end{cases} \quad (5-43)$$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στον ορισμό της D.F., βλ. Παρ. 4.2.1, η μέθοδος ανάλυσης D.F.A. μπορεί να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα εφ' όσον μόνον η βασική συνιστώσα της εξόδου είναι σημαντική, που σημαίνει ότι οι υψηλότερες αρμονικές είναι κατά πολύ εξασθενημένες σε σχέση με την βασική. Εξετάζοντας το ισοδύναμο δομικό διάγραμμα ενός συστήματος με τριβή, βλ. Σχ. 5-2, προκύπτει ότι για εξαιρετική ακρίβεια θα πρέπει η συνάρτηση μεταφοράς $G_L(s)$ να εξασθενεί όλες τις υψηλότερες αρμονικές, διότι μόνο τότε μπορεί η N να θεωρηθεί ως ένα πραγματικό ή μιγαδικό κέρδος και κατά συνέπεια να ισχύσει η D.F.A.

Αποτελεί κοινό τόπο ότι η ικανοποιητική εξασθένηση των υψηλότερων αρμονικών από ένα γραμμικό στοιχείο εξαρτάται άμεσα από το διάγραμμα Bode της συνάρτησης μεταφοράς του στοιχείου αυτού. Αν λοιπόν είναι γνωστές οι αρμονικές που εμφανίζονται στο σύστημα μπορεί να αξιολογηθεί ο βαθμός εξασθένησης των υψηλότερων έναντι της βασικής αρμονικής ελέγχοντας την διαφορά που υπάρχει μεταξύ των λογαριθμικών μέτρων της συνάρτησης μεταφοράς σ' αυτές τις συχνότητες. Δεδομένου μάλιστα ότι σε συστήματα με τριβή η μη γραμμικότητα είναι περιττή συνάρτηση ("odd function") οι αρμονικές που αναμένεται να εμφανιστούν θα απέχουν μεταξύ τους τρεις φορές την βασική συνιστώσα. Αυτό σημαίνει ότι η διαφορά μεταξύ του λογαριθμικού μέτρου της συνάρτησης μεταφοράς (του γραμμικού τμήματος του συστήματος) που αντιστοιχεί στην βασική αρμονική συνιστώσα ενός L.C., $\omega_{L.C.}$, και του λογαριθμικού μέτρου που αντιστοιχεί στην ακριβώς επόμενη υψηλότερη αρμονική συνιστώσα, $3\omega_{L.C.}$, μπορεί να υπολογιστεί και είναι ίση με:

$$\Delta G = \left| -20 \cdot \log_{10} |G_L(j\omega_{L.C.})| + 20 \cdot \log_{10} |G_L(j(3\omega_{L.C.}))| \right| \quad (5-44)$$

Στη συνέχεια εξετάζεται με προσομοίωση στο Matlab/Simulink η σχέση μεταξύ της διαφοράς ΔG και της ικανοποιητικής πρόβλεψης χαρακτηριστικών L.C.

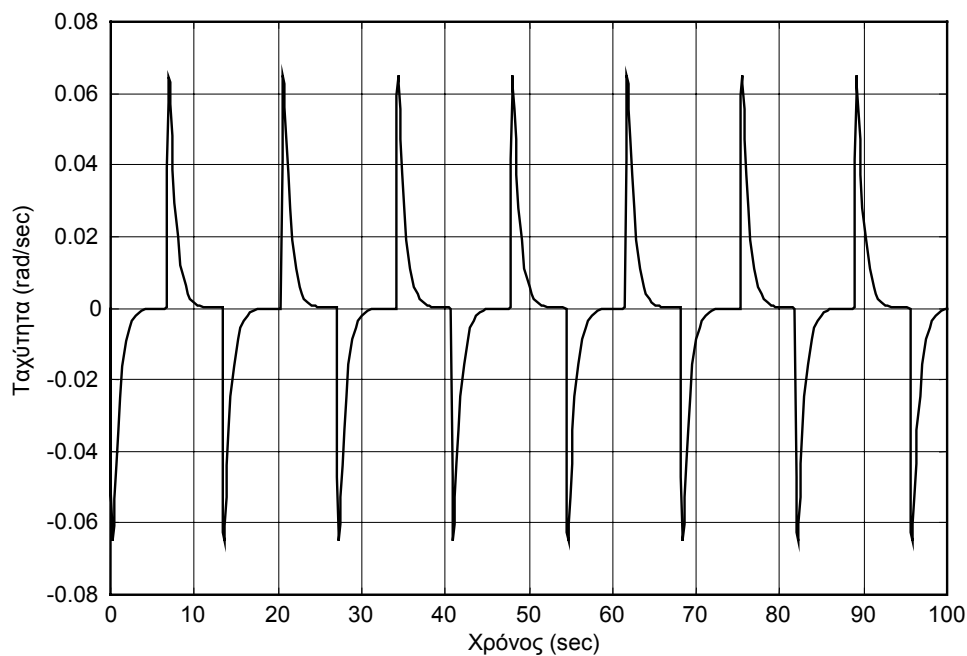
Το σύστημα που χρησιμοποιήθηκε στις προσομοιώσεις έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

$$\begin{aligned} \Delta T_c &= -0.002 Nm, \Delta b = 0 Nm \cdot sec / rad, R_a = 10 Ohm, K_T = 0.105 Nm / A, \\ K &= 0.005 Nm / rad, J = 0.005 Kg \cdot m^2, B = 0.005 Nm \cdot sec / rad, \\ K_p &= 5 Volt / rad, K_d = 4.25 Volt \cdot sec / rad \end{aligned} \quad (5-45)$$

Οι τιμές των παραμέτρων του κινητήρα, είναι τυπικές τιμές για έναν κινητήρα συνεχούς ρεύματος μόνιμου μαγνήτη. Επίσης, η τιμή της ροπής αδράνειας του κινούμενου σώματος και των περιστρεφόμενων τμημάτων του συστήματος, J , η σταθερά του ελατηρίου, K , και η τιμή της σταθεράς του αποσβεστήρα, B , είναι τυχαία επιλεγμένες. Όσον αφορά τις διαφορές στην εκτίμηση των παραμέτρων της τριβής,

ΔT_c , Δb , η επιλογή τους έχει γίνει σύμφωνα με τον χάρτη εντοπισμού L.C. του Πίν. 5-1 έτσι ώστε να εμφανίζεται L.C. Με το ίδιο κριτήριο έχουν επιλεγεί και τα κέρδη του PD κατευθυντή.

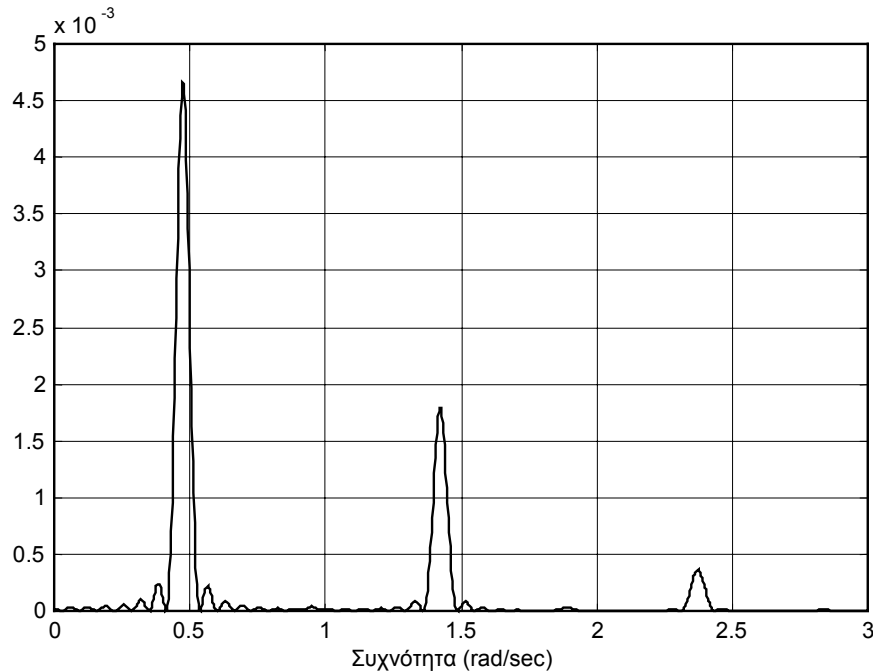
Τότε, η συνάρτηση μεταφοράς του γραμμικού τμήματος του συστήματος, $G_L(s)$, που δίνεται από την Εξ. (5-32), είναι γνωστή. Επομένως, είναι γνωστή και η απόκριση του ισοδύναμου συστήματος που δίνεται από το Σχ. 5-2. Ειδικότερα, αν υποθέσουμε ότι η είσοδος στο ισοδύναμο σύστημα είναι μία βηματική συνάρτηση, τότε απόκριση του δίνεται στο Σχ. 5-11.



Σχήμα 5-11. Τυπική απόκριση του συστήματος του Σχ. 5-2 με L.C.

Αν μετασχηματιστεί κατά Fourier το σήμα του Σχ. 5-11 (μετασχηματισμός FFT) τότε μπορούν να βρεθούν οι αρμονικές από τις οποίες αποτελείται το σήμα αυτό. Ειδικότερα, στο συγκεκριμένο παράδειγμα το φάσμα ισχύος του σήματος δίνεται στο Σχ. 5-12.

Μ' αυτόν τον τρόπο είναι γνωστές οι αρμονικές του σήματος εξόδου του συστήματος, οπότε μπορούν να συγκριθούν με εκείνες που προκύπτουν θεωρητικά, δηλαδή με εκείνες που προκύπτουν κατά την εφαρμογή της ανάλυσης M.E.D.F.

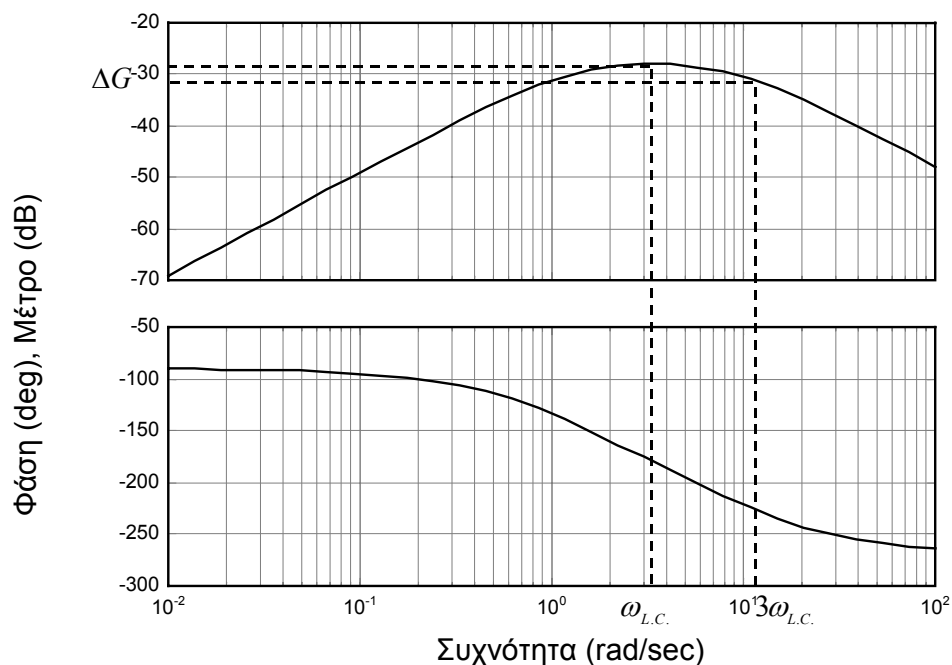


Σχήμα 5-12. Φάσμα ισχύος του σήματος εξόδου από το σύστημα του Σχ. 5-2.

Επίσης, σχεδιάζοντας το διάγραμμα Bode του γραμμικού τμήματος του συστήματος, μπορεί να ελεγχθεί αν υπάρχει σχέση μεταξύ της ακρίβειας προσδιορισμού του πλάτους και της συχνότητας της παραμένουσας ταλάντωσης με την διαφορά λογαριθμικού μέτρου της δεύτερης από την βασική αρμονική συνιστώσα (οι τελευταίες προέκυψαν θεωρητικά με την μέθοδο ανάλυσης M.D.F.E.). Ειδικότερα, στην περίπτωση των χαρακτηριστικών του συστήματος με βάσει τα οποία σχεδιάστηκε η απόκριση του Σχ. 5-11, το διάγραμμα Bode δίνεται στο Σχ. 5-13.

Από το διάγραμμα Bode του Σχ. 5-13 υπολογίζεται η διαφορά λογαριθμικού μέτρου, ΔG , μεταξύ της βασικής αρμονικής συνιστώσας και της ακριβώς επόμενης αρμονικής.

Διαγράμματα Bode

**Σχήμα 5-13.** Διάγραμμα Bode του γραμμικού τμήματος του συστήματος του Σχ. 5-2.

Μετρώντας την διαφορά λογαριθμικού μέτρου για διάφορες τιμές των κερδών του PD κατευθυντή συγκροτήθηκε ο ακόλουθος πίνακας:

Πίνακας 5-3. Σύγκριση των θεωρητικών τιμών του πλάτους και της συχνότητας του L.C. με εκείνες που προέκυψαν με προσομοίωση στο Matlab/Simulink για συστήματα 2^{ης} τάξης με έλεγχο τάσης και PD κατευθυντή.

α.α.	$\frac{K_d}{K_p}$	K_p	$\omega_{L.C.}$	$\omega_{L.C.,s}$	e_ω	$X_{L.C.}$	$X_{L.C.,s}$	e_X	ΔG	St
	(sec)	$\left(\frac{V}{rad}\right)$	$\left(\frac{rad}{sec}\right)$	$\left(\frac{rad}{sec}\right)$	(%)	$\left(\frac{rad}{sec}\right)$	$\left(\frac{rad}{sec}\right)$	(%)	(dB)	
1	0.850	5	3.391	0.475	86.0	0.050	0.065	30.0	2.539	1
2	0.650	5	3.391	0.700	79.4	0.063	0.077	22.2	3.548	1
3	0.550	5	3.391	0.807	76.2	0.073	0.085	16.4	4.267	1
4	0.350	5	3.391	2.400	29.2	0.104	0.110	5.80	6.447	1
5	0.250	5	3.391	2.850	16.0	0.133	0.135	1.50	8.149	1
6	0.150	5	3.391	3.150	7.10	0.182	0.178	2.20	10.60	1

7	0.046	95	14.16	13.25	6.40	0.049	0.047	4.10	11.52	1
8	0.046	45	9.772	9.450	3.00	0.092	0.088	4.30	13.60	1
9	0.050	25	7.314	7.200	1.60	0.133	0.127	4.50	14.27	1
10	0.046	15	5.701	5.650	0.90	0.191	0.183	4.20	15.24	1
11	0.026	25	7.314	7.300	0.20	0.197	0.190	3.60	17.63	1
12	0.021	25	7.314	7.320	0.10	0.219	0.213	2.70	18.54	1
13	0.016	45	9.772	9.750	0.20	0.187	0.182	2.70	19.64	1
14	0.011	95	14.16	14.12	0.30	0.149	0.146	2.00	20.91	1
15	0.011	85	13.40	13.37	0.20	0.160	0.157	1.80	21.04	1
16	0.006	95	14.16	14.20	0.30	0.211	0.208	1.40	23.90	1
17	0.001	35	8.631	8.700	0.80	0.394	0.390	1.00	25.02	1
18	0.001	55	10.79	10.86	0.60	0.381	0.378	0.80	26.70	1
19	0.001	65	11.73	11.80	0.60	0.376	0.371	1.30	27.30	1
20	0.001	85	13.40	13.45	0.40	0.364	0.361	0.80	28.15	1

όπου:

$\omega_{L.C.}$ η συχνότητα του L.C. κατά την D.F.A., Εξ. (5-43), σε rad/sec,

$\omega_{L.C.,s}$ η συχνότητα του L.C. που προέκυψε από την προσομοίωση στο Matlab/Simulink, σε rad/sec,

$e_{\omega} = \frac{|\omega_{L.C.} - \omega_{L.C.,s}|}{\omega_{L.C.}}$ το σχετικό σφάλμα στον προσδιορισμό της συχνότητας του L.C.,

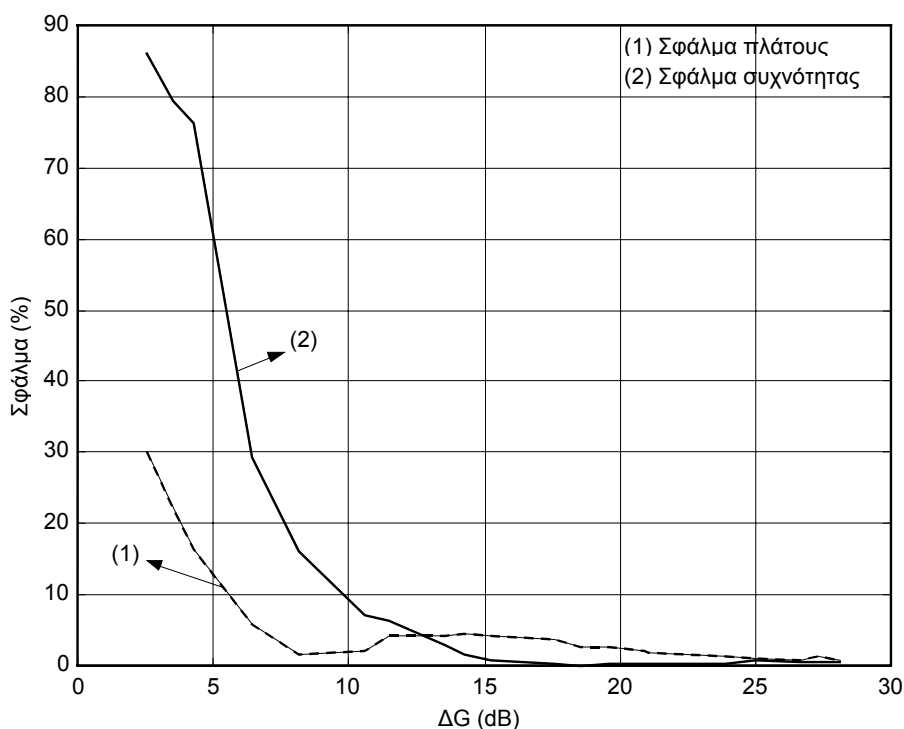
$X_{L.C.}$ το πλάτος του L.C. κατά την D.F.A., Εξ. (5-43), σε rad/sec,

$X_{L.C.,s}$ το πλάτος του L.C. που προέκυψε από την προσομοίωση στο Matlab/Simulink, σε rad/sec,

$e_x = \frac{|X_{L.C.} - X_{L.C.,s}|}{X_{L.C.}}$ το σχετικό σφάλμα στον προσδιορισμό του πλάτους του L.C.,

St ένας δείκτης της ευστάθειας του συστήματος χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής. Η τιμή «1» αντιστοιχεί σε ευσταθές σύστημα, ενώ η τιμή «0» σε ασταθές.

Από τα στοιχεία του Πίν. 5-2 σχεδιάζεται η ακόλουθη γραφική παράσταση:



Σχήμα 5-14. Γραφική παράσταση του σφάλματος στην προσέγγιση της τιμής του πλάτους και της συχνότητας του L.C. για την περίπτωση ενός συστήματος 2^{ης} τάξης με PD κατευθυντή.

Από το Σχ. 5-14 προκύπτει ότι ικανοποιητική ακρίβεια στον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών του L.C. επιτυγχάνεται για:

$$\Delta G > 20dB \quad (5-46)$$

Κατά συνέπεια προκύπτει το ακόλουθο συμπέρασμα:

Συμπέρασμα 5-4:

Σε ένα σύστημα 2^{ης} τάξης, μιας μάζας και με τριβή που δίνεται από το κλασσικό μοντέλο τριβής (Coulomb+εξώδη τριβή), η ακρίβεια στον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών του L.C. εξαρτάται άμεσα από την διαφορά λογαριθμικού μέτρου στο διάγραμμα Bode της συνάρτησης μεταφοράς του γραμμικού τμήματος του συστήματος, μεταξύ των συχνοτήτων $\omega_{L.C.}$ και $3\omega_{L.C.}$. Μάλιστα αν η διαφορά αυτή είναι μεγαλύτερη από «20dB» τότε η ακρίβεια είναι εξαιρετική.

(β) Έλεγχος με πηγή ρεύματος

Με τρόπο ανάλογο με εκείνον που εφαρμόστηκε στην περίπτωση του ελέγχου με πηγή τάσης προκύπτει ότι το πλάτος και η συχνότητα στην περίπτωση του ελέγχου με πηγή ρεύματος είναι:

$$\begin{cases} X = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{(\Delta T_c \omega) \cdot [(B + \Delta b + K_{amp} K_T K_d) \omega]}{(K_{amp} K_T K_p + K - J \omega^2)^2 + [(B + \Delta b + K_{amp} K_T K_d) \omega]^2} \\ \omega = \sqrt{\frac{K_{amp} K_T K_p + K}{J}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_{L.C.} = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\Delta T_c}{(B + \Delta b + K_{amp} K_T K_d)} \\ \omega_{L.C.} = \sqrt{\frac{K_{amp} K_T K_p + K}{J}} \end{cases} \quad (5-47)$$

Επιπλέον, δεδομένου ότι η δομή του συστήματος σ' αυτήν την περίπτωση δεν αλλάζει, το συμπέρασμα 5-4 ισχύει και για την περίπτωση του ελέγχου με πηγή ρεύματος.

5.2.2.5 Σχέση μεταξύ της διαφοράς ΔG και της απόσβεσης ζ του γραμμικού τμήματος ενός συστήματος 2^{ης} τάξης

Έλεγχος με πηγή τάσης

Η συνάρτηση μεταφοράς του γραμμικού τμήματος του συστήματος, βλ. Εξ. (5-27), μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$G_L(s) = \frac{\frac{\Delta T_c}{J} s}{s^2 + \frac{BR_a + \Delta b R_a + K_T^2 + K_T K_d}{R_a J} s + \frac{K_T K_p + K R_a}{R_a J}} = \frac{rs}{s^2 + 2\zeta \omega_n + \omega_n^2} \quad (5-48)$$

όπου:

$$\zeta = \frac{BR_a + \Delta b R_a + K_T^2 + K_T K_d}{2\sqrt{(K_T K_p + K R_a) R_a J}}, \omega_n = \sqrt{\frac{K_T K_p + K R_a}{R_a J}}, r = \frac{\Delta T_c}{J} \quad (5-49)$$

Επομένως:

□ Για $s = j\omega_n$:

$$G(j\omega_n) = \frac{r}{2\zeta \omega_n} \quad (5-50)$$

□ Για $s = j(3\omega_n)$:

$$G_L[j(3\omega_n)] = \frac{(3r)j}{-8\omega_n + (6\zeta\omega_n)j} = \frac{18r\zeta}{\omega_n(64 + 36\zeta^2)} - \frac{24r}{\omega_n(64 + 36\zeta^2)}j \quad (5-51)$$

Η διαφορά ΔG υπολογίζεται από την Εξ. (5-44), και σ' αυτήν την περίπτωση είναι:

$$\begin{aligned} \Delta G &= \left| -20 \cdot \log_{10} |G(j\omega_{L.C.})| + 20 \cdot \log_{10} |G[j(3\omega_{L.C.})]| \right| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Delta G = 20 \cdot \left| \log_{10} \left| \frac{G[j(3\omega_{L.C.})]}{G(j\omega_{L.C.})} \right| \right| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Delta G = 20 \cdot \left| \log_{10} \left| \frac{2\zeta}{64 + 36\zeta^2} \cdot \sqrt{(18\zeta)^2 + 24^2} \right| \right| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Delta G = 20 \cdot \left| \log_{10} \left\{ \frac{2\zeta}{64 + 36\zeta^2} \cdot \sqrt{(18\zeta)^2 + 24^2} \right\} \right| \Leftrightarrow \end{aligned} \quad (5-52)$$

Από την Εξ. (5-52) φαίνεται ότι η διαφορά ΔG εξαρτάται μόνο από την απόσβεση ζ του γραμμικού τμήματος του συστήματος 2^{ης} τάξης. Έτσι η ανισότητα $\Delta G > 20dB$ μπορεί να αναχθεί σε μία ανισότητα του ζ . Συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned} DG > 20dB &\Leftrightarrow 20 \left| \log_{10} \left\{ \frac{2\zeta}{64 + 36\zeta^2} \sqrt{(18\zeta)^2 + 24^2} \right\} \right| > 20 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\zeta}{64 + 36\zeta^2} \sqrt{(18\zeta)^2 + 24^2} > 10 \\ \text{ή} \\ \frac{2\zeta}{64 + 36\zeta^2} \sqrt{(18\zeta)^2 + 24^2} < 0.1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 128304\zeta^4 + 458496\zeta^2 + 409600 < 0 \\ \text{ή} \\ \zeta < 0.134 \end{cases} \end{aligned} \quad (5-53)$$

Η πρώτη από τις δύο ανισότητες της Εξ. (5-53) είναι αδύνατον να ισχύει οπότε προκύπτει ότι:

$$\Delta G > 20dB \Leftrightarrow \zeta < 0.134 \quad (5-54)$$

Επομένως το συμπέρασμα 5-4 ανάγεται στο εξής:

Συμπέρασμα 5-5:

Σε ένα σύστημα 2^{ης} τάξης, μιας μάζας και με τριβή που δίνεται από το κλασσικό μοντέλο τριβής (Coulomb+εξώδη τριβή), η ακρίβεια στον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών του L.C. εξαρτάται άμεσα από την απόσβεση του γραμμικού τμήματος

του συστήματος. Μάλιστα αν η απόσβεση είναι μικρότερη από «0.134» τότε η ακρίβεια είναι εξαιρετική.

5.2.2.6 Οδήγηση του συστήματος σε περιοχή προσδιορισμού των χαρακτηριστικών του L.C. με εξαιρετική ακρίβεια

Έλεγχος με πηγή τάσης

Από τον Πίν. 5-1 προκύπτει ότι υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες είναι αδύνατον να αποφευχθεί ο εντοπισμός L.C. (συγκεκριμένα αυτό συμβαίνει όταν $\Delta b > 0$ και $\Delta T_c < 0$). Τότε, θα ήταν αναγκαίο το σύστημα να οδηγηθεί σε περιοχή λειτουργίας όπου τα χαρακτηριστικά του L.C. μπορούν να προσδιοριστούν με εξαιρετική ακρίβεια.

Από τις Εξ. (5-49), (5-54) προκύπτει ότι για να ισχύει αυτό θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{BR_a + \Delta b R_a + K_r^2 + K_r K_d}{2\sqrt{(K_r K_p + K R_a) R_a M}} < 0.134 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K_p \geq \left\{ \left[\frac{(B + \Delta b) R_a + K_r^2 + K_r K_d}{0.268 R_a M} \right]^2 - \frac{K}{M} \right\} \frac{R_a M}{K_r} \quad (5-55)$$

Με άλλα λόγια πάντοτε θα υπάρχει κάποιο K_p που θα μπορεί να οδηγήσει το σύστημα σε περιοχή όπου τα χαρακτηριστικά του L.C. θα υπολογίζονται με εξαιρετική ακρίβεια. Οι παρατηρήσεις αυτές συμπυκνώνονται στο ακόλουθο συμπέρασμα:

Συμπέρασμα 5-6:

Σε ένα σύστημα 2ας τάξης, μιας μάζας και με τριβή που δίνεται από το κλασσικό μοντέλο τριβής (Coulomb+εξώδη τριβή), η ύπαρξη αντιστάθμισης της τριβής

- με $\Delta b < 0$ οδηγεί σε περιοχή λειτουργίας όπου ο εντοπισμός L.C. εξαρτάται από το κέρδος K_d , οπότε μπορεί να αποφευχθεί με κατάλληλη επιλογή του.
- με $\Delta b > 0$ οδηγεί σε περιοχή λειτουργίας όπου ο εντοπισμός L.C. δεν εξαρτάται από κανένα κέρδος, ενώ στην περίπτωση που εντοπιστεί ($\Delta T_c < 0$), η ακρίβεια στον προσδιορισμό του πλάτους και της συχνότητας εξαρτάται από

$$\text{το κέρδος } K_p. \text{ Μάλιστα όταν: } K_p \geq \left\{ \left[\frac{(B + \Delta b) R_a + K_r^2 + K_r K_d}{0.268 R_a M} \right]^2 - \frac{K}{M} \right\} \frac{R_a M}{K_r}$$

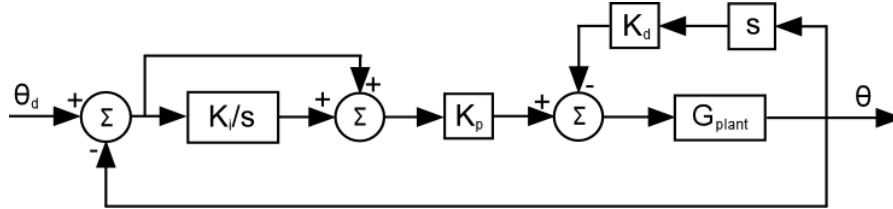
η ακρίβεια είναι εξαιρετική.

5.2.3 Συστήματα 2^{ης} τάξης με PID κατευθυντή

5.2.3.1 Μοντελοποίηση

Στην περίπτωση ενός συστήματος 2^{ης} τάξης με PID έλεγχο, το σύστημα χωρίς τον κατευθυντή δεν διαφέρει από το σύστημα που μοντελοποιήθηκε στην Παρ. 5.2.2.1.

Αν σ' αυτό το σύστημα εισαχθεί ένας PID κατευθυντής τότε προκύπτει το δομικό διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος:



Σχήμα 5-15. Δομικό διάγραμμα του συστήματος 2^{ης} μετά την προσθήκη του PID κατευθυντή.

Για το σύστημα του Σχ. 5-15 η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από την εξίσωση:

$$G_{total} = \frac{\left(1 + \frac{K_i}{s}\right) K_p G_{plant}}{1 + K_d G_{plant} s + \left(1 + \frac{K_i}{s}\right) K_p G_{plant}} \quad (5-56)$$

όπου:

K_i το κέρδος του ολοκληρωτικού ελέγχου σε (1/sec),

και η χαρακτηριστική εξίσωση από την εξίσωση:

$$1 + K_d G_{plant} s + \left(1 + \frac{K_i}{s}\right) K_p G_{plant} = 0 \quad (5-57)$$

ή ισοδύναμα από την εξίσωση:

$$G_{plant} = -\frac{1}{K_d s + \left(1 + \frac{K_i}{s}\right) K_p} \quad (5-58)$$

Όπως και στην περίπτωση του PD κατευθυντή, έτσι και στην περίπτωση του PID κατευθυντή διακρίνονται δύο περιπτώσεις:

(α) Έλεγχος με πηγή τάσης

Από τις Εξ. (5-12) και (5-56) προκύπτει ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος είναι η:

$$G_{total,v} = \frac{a_{1,v}s + a_{0,v}}{b_{4,v}s^3 + [b_{3,v} + b_{2,v}N(X)]s^2 + b_{1,v}s + b_{0,v}} \quad (5-59)$$

όπου:

$$a_{0,v} = b_{0,v} = K_p K_T K_i ,$$

$$a_{1,v} = K_p K_T ,$$

$$b_{1,v} = K_T K_p + K R_a ,$$

$$b_{2,v} = R_a \Delta T_c ,$$

$$b_{3,v} = B R_a + \Delta b R_a + K_T^2 + K_T K_d ,$$

$$b_{4,v} = R_a J .$$

και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η:

$$b_{4,v}s^3 + [b_{3,v} + b_{2,v}N(X)]s^2 + b_{1,v}s + b_{0,v} = 0 \quad (5-60)$$

(β) Έλεγχος με πηγή ρεύματος

Από τις Εξ. (5-18) και (5-56) προκύπτει ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος είναι η:

$$G_{total,i} = \frac{a_{1,i}s + a_{0,i}}{b_{4,i}s^3 + [b_{3,i} + b_{2,i}N(X)]s^2 + b_{1,i}s + b_{0,i}} \quad (5-61)$$

όπου:

$$a_{0,i} = b_{0,i} = K_p K_{amp} K_T K_i ,$$

$$a_{1,i} = K_p K_{amp} K_T ,$$

$$b_{1,i} = K_p K_{amp} K_T + K ,$$

$$b_{2,i} = \Delta T_c$$

$$b_{3,i} = \Delta b + B + K_{amp} K_T K_d ,$$

$$b_{4,i} = J ,$$

και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η:

$$b_{4,i}s^3 + [b_{3,i} + b_{2,i}N(X)]s^2 + b_{1,i}s + b_{0,i} = 0 \quad (5-62)$$

5.2.3.2 Εφαρμογή της M.E.D.F.

(α) Έλεγχος με πηγή τάσης

Απομονώνοντας το μη γραμμικό τμήμα του συστήματος, που εκφράζεται από την D.F. $N(X)$, η Εξ. (5-60) γράφεται:

$$-\frac{1}{N(X)} = \frac{b_{2,v}s^2}{b_{4,v}s^3 + b_{3,v}s^2 + b_{1,v}s + b_{0,v}} \quad (5-63)$$

Αν τεθεί:

$$G_L(s) = \frac{b_{2,v}s^2}{b_{4,v}s^3 + b_{3,v}s^2 + b_{1,v}s + b_{0,v}} \quad (5-64)$$

τότε, η Εξ. (5-63) γράφεται:

$$-\frac{1}{N(X)} = G_L(s) \quad (5-65)$$

όπου:

$$N(X) = \frac{4}{\pi X} \quad (5-66)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (5-64) το s με το $j\omega$ προκύπτει:

$$G_L(j\omega) = \frac{-b_{2,v}\omega^2}{(-b_{3,v}\omega^2 + b_{0,v}) + (-b_{4,v}\omega^3 + b_{1,v}\omega)j} \quad (5-67)$$

Αν τεθεί:

$$\begin{aligned} D &= -b_{2,v} \cdot \omega^2 \\ E &= -b_{3,v} \cdot \omega^2 + b_{0,v} \\ F &= -b_{4,v} \cdot \omega^3 + b_{1,v} \cdot \omega \end{aligned} \quad (5-68)$$

τότε, η Εξ. (5-67) γράφεται:

$$G_L(j\omega) = \frac{D \cdot E}{E^2 + F^2} - \frac{D \cdot F}{E^2 + F^2} \cdot j \quad (5-69)$$

Για να εντοπιστεί L.C. θα πρέπει σύμφωνα με τις Εξ. (5-65), (5-66), η εξίσωση:

$$G_L(j\omega) = -\frac{\pi \cdot X}{4} \quad (5-70)$$

να έχει λύση. Δεδομένου, όμως, ότι το πλάτος του L.C. είναι $X > 0$, για να έχει λύση η Εξ. (5-70) θα πρέπει, σύμφωνα με την Εξ. (5-69), να ισχύει:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{G_L(j\omega)\} < 0 \\ \operatorname{Im}\{G_L(j\omega)\} = 0 \end{cases} \quad (5-71)$$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{cases} D \cdot E < 0 \\ D \cdot F = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} D < 0, E > 0 \\ \dot{\eta} \end{cases} \\ \begin{cases} D > 0, E < 0 \\ \dot{\eta} \end{cases} \\ \begin{cases} D = 0 \\ \dot{\eta} \\ F = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (-b_{2,v}\omega^2) < 0, (-b_{3,v}\omega^2 + b_{0,v}) > 0 \\ \dot{\eta} \end{cases} \\ \begin{cases} (-b_{2,v}\omega^2) > 0, (-b_{3,v}\omega^2 + b_{0,v}) < 0 \\ \dot{\eta} \end{cases} \\ \begin{cases} (-b_{2,v}\omega^2) = 0 \\ \dot{\eta} \\ (-b_{4,v}\omega^3 + b_{1,v}\omega) = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \quad (5-72)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} b_{2,v} > 0, (-b_{3,v}\omega^2 + b_{0,v}) > 0 \\ \dot{\eta} \end{cases} \\ \begin{cases} b_{2,v} < 0, (-b_{3,v}\omega^2 + b_{0,v}) < 0 \\ \dot{\eta} \end{cases} \\ \omega^2 = \frac{b_{1,v}}{b_{4,v}} \end{cases} \quad (5-73)$$

Επομένως, L.C. θα εμφανιστεί αν και μόνον αν ισχύει:

$$\begin{cases} \begin{cases} b_{2,v} > 0, b_{3,v} < \frac{b_{4,v}}{b_{1,v}} b_{0,v} \\ \dot{\eta} \end{cases} \\ \begin{cases} b_{2,v} < 0, b_{3,v} > \frac{b_{4,v}}{b_{1,v}} b_{0,v} \\ \dot{\eta} \end{cases} \end{cases} \quad (5-74)$$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{cases} \begin{cases} \Delta T_c > 0, (BR_a + \Delta bR_a + K_T^2 + K_T K_d) < \frac{R_a J}{K_T K_p + KR_a} K_p K_T K_i \\ \dot{\eta} \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta T_c < 0, (BR_a + \Delta bR_a + K_T^2 + K_T K_d) > \frac{R_a J}{K_T K_p + KR_a} K_p K_T K_i \\ \dot{\eta} \end{cases} \end{cases} \quad (5-75)$$

Δεδομένου ότι το συνολικό σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς που δίνεται από την Εξ. (5-59), το ίδιο σύστημα χωρίς όμως την μη γραμμικότητα της τριβής θα έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$G_{linear,v} = \frac{a_{1,v} \cdot s + a_{0,v}}{b_{4,v} \cdot s^3 + b_{3,v} \cdot s^2 + b_{1,v} \cdot s + b_{0,v}} \quad (5-76)$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο ευστάθειας γραμμικών συστημάτων των Routh-Harwitz στο σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς που δίνεται από την Εξ. (5-76), και αφού $b_{0,v} > 0$, $b_{1,v} > 0$, $b_{4,v} > 0$, προκύπτει ότι το σύστημα είναι ευσταθές εφ' όσον ισχύει:

$$\frac{b_{3,v}b_{1,v} - b_{4,v}b_{0,v}}{b_{3,v}} > 0 \Leftrightarrow b_{3,v} > \frac{b_{4,v}}{b_{1,v}} \cdot b_{0,v} \quad (5-77)$$

ή ισοδύναμα εφ' όσον ισχύει:

$$\left(BR_a + \Delta bR_a + K_T^2 + K_T K_d \right) > \frac{R_a J}{K_T K_p + K R_a} \cdot K_p K_T K_i \quad (5-78)$$

Συγκρίνοντας τις συνθήκες εμφάνισης L.C., βλ. Εξ. (5-75), με την συνθήκη ευστάθειας του συνολικού συστήματος χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής, Εξ. (5-78), προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

Συμπέρασμα 5-7:

Σε ένα σύστημα 2^{ης} τάξης, μιας μάζας, με τριβή που δίνεται από το μοντέλο (Coulomb+ιξώδη τριβή), με έλεγχο τάσης και με PID κατευθυντή, αν δεν υπάρχει αντιστάθμιση της τριβής, δηλαδή $\Delta T_c = T_c > 0$, ή αν υπάρχει αντιστάθμιση της τριβής χρησιμοποιώντας το κλασσικό μοντέλο τριβής, με $\Delta T_c > 0$, L.C. θα εμφανιστεί αν και μόνον αν το συνολικό σύστημα χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής είναι ασταθές.

Το συμπέρασμα αυτό ταυτίζεται με την διαπίστωση του Amin, βλ. Παρ. 5.2.1.

Συμπέρασμα 5-8:

Σε ένα σύστημα 2^{ης} τάξης, μιας μάζας, με τριβή που δίνεται από το κλασσικό μοντέλο τριβής (Coulomb+ιξώδη τριβή), με έλεγχο τάσης και με PID κατευθυντή, αν υπάρχει αντιστάθμιση της τριβής χρησιμοποιώντας το κλασσικό μοντέλο τριβής, με $\Delta T_c < 0$, L.C. θα εμφανιστεί αν και μόνον αν το συνολικό σύστημα χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής είναι ευσταθές.

Δεδομένου ότι πάντοτε τα κέρδη του PID ελεγκτή είναι θετικοί αριθμοί, από τα συμπεράσματα 5-7, 5-8 διακρίνονται οι περιπτώσεις εντοπισμού L.C. που δίνονται στον Πίν. 5-4.

Από τον Πίν. 5-4 προκύπτει ότι ο εντοπισμός L.C. μπορεί σε κάθε πιθανό συνδυασμό των διαφορών Δb , ΔT_c να αποφευχθεί με κατάλληλη επιλογή των κερδών, διότι εξαρτάται από τρεις ανεξάρτητες, θετικές μεταβλητές που είναι τα τρία κέρδη του PID κατευθυντή. Επομένως, όταν σε ένα σύστημα 2^{ης} τάξης χρησιμοποιείται PID κατευθυντής το σύστημα μπορεί να οδηγηθεί σε περιοχή λειτουργίας όπου δεν εντοπίζεται L.C. Συνοψίζοντας, προκύπτει το συμπέρασμα 5-9.

Πίνακας 5-4. Χάρτης εντοπισμού L.C. σε σύστημα 2^{ης} τάξης, μιας μάζας, με τριβή Coulomb+ιξώδη, με έλεγχο τάσης και PID κατευθυντή.

	$\Delta b > 0$ ή $\Delta b < 0$
$\Delta T_c > 0$	Προβλέπεται να εμφανιστεί L.C. όταν: $K_i > \frac{[R_a(B + \Delta b) + K_T(K_T + K_d)] \cdot (K_p K_T + K R_a)}{(R_a J) K_p K_T}$
$\Delta T_c < 0$	Προβλέπεται να εμφανιστεί L.C. όταν: $K_i < \frac{[R_a(B + \Delta b) + K_T(K_T + K_d)] \cdot (K_p K_T + K R_a)}{(R_a J) K_p K_T}$

Συμπέρασμα 5-9:

Σε ένα σύστημα 2^{ης} τάξης, μιας μάζας, με τριβή που δίνεται από το κλασσικό μοντέλο τριβής (Coulomb+ιξώδη τριβή) και με PID κατευθυντή, αν υπάρχει αντιστάθμιση της τριβής, ο εντοπισμός L.C. εξαρτάται από τρεις ανεξάρτητες, θετικές μεταβλητές (τα τρία κέρδη του PID κατευθυντή), με αποτέλεσμα πάντοτε να μπορεί να αποφευχθεί με κατάλληλη επιλογή των κερδών.

Επομένως, σ' αυτά τα συστήματα η οδήγηση του συστήματος σε περιοχή λειτουργίας όπου τα χαρακτηριστικά του L.C. θα προσδιορίζονται με εξαιρετική ακρίβεια δεν έχει ιδιαίτερη σημασία. Εντούτοις, στην επόμενη ενότητα αποδεικνύεται με την βοήθεια προσομοιώσεων ότι το κριτήριο της Εξ. (5-46), που αποδείχτηκε για συστήματα 2^{ης} τάξης με PD κατευθυντή, ισχύει και στην περίπτωση συστημάτων 2^{ης} τάξης με PID κατευθυντή.

(β) Έλεγχος με πηγή ρεύματος

Με βάσει την Εξ. (5-62) και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την περίπτωση του ελέγχου με πηγή τάσης προκύπτουν οι περιπτώσεις εντοπισμού L.C. που παρατίθενται στον Πίν. 5-5.

Επίσης, ισχύουν τα ίδια ακριβώς συμπεράσματα που προέκυψαν για την περίπτωση του ελέγχου με πηγή τάσης (συμπεράσματα 5-7, 5-8, 5-9).

Πίνακας 5-5. Χάρτης εντοπισμού L.C. σε σύστημα 2^{ης} τάξης, μιας μάζας, με τριβή Coulomb+ιξώδη, με έλεγχο ρεύματος και PID κατευθυντή.

	$\Delta b > 0$ ή $\Delta b < 0$
$\Delta T_c > 0$	Προβλέπεται να εμφανιστεί L.C. όταν: $K_i > \frac{(\Delta b + B + K_{amp} K_T K_d)}{K_p K_{amp} K_T J} \cdot (K_p K_{amp} K_T + K)$
$\Delta T_c < 0$	Προβλέπεται να εμφανιστεί L.C. όταν: $K_i < \frac{(\Delta b + B + K_{amp} K_T K_d)}{K_p K_{amp} K_T J} \cdot (K_p K_{amp} K_T + K)$

5.2.3.3 Ακρίβεια προσδιορισμού των χαρακτηριστικών του L.C.

(α) Έλεγχος με πηγή τάσης

Όπως βρέθηκε στην Παρ. 4.1.2 κατά την εφαρμογή της D.F.A. οι τιμές των χαρακτηριστικών του L.C. (πλάτος και συχνότητα), εφ' όσον προβλέπεται να εμφανιστεί (πράγμα που σημαίνει ότι θα ισχύει και $\Delta T_c \neq 0 \Leftrightarrow X \neq 0$), υπολογίζονται από τις Εξ. (5-69), (5-70), ως εξής:

$$G_L(j\omega) = -\frac{\pi X}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}\{G_L(j\omega)\} = -\frac{\pi X}{4} \\ \operatorname{Im}\{G_L(j\omega)\} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{D \cdot E}{E^2 + F^2} = -\frac{\pi X}{4} \\ D \cdot F = 0 \end{cases} \quad (5-79)$$

οπότε προκύπτει ότι:

$$\begin{cases} X = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-b_{2,v} \cdot \omega^2) \cdot (-b_{3,v} \cdot \omega^2 + b_{0,v})}{(-b_{3,v} \cdot \omega^2 + b_{0,v})^2 + (-b_{4,v} \cdot \omega^3 + b_{1,v} \cdot \omega)^2} \\ \omega = \sqrt{\frac{b_{1,v}}{b_{4,v}}} \end{cases} \quad (5-80)$$

Άρα, η συχνότητα και το πλάτος του L.C. δίνονται από την εξίσωση:

$$\begin{cases} X_{L.C.} = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\left(-b_{2,v} \frac{b_{1,v}}{b_{4,v}}\right)}{\left(-b_{3,v} \frac{b_{1,v}}{b_{4,v}} + b_{0,v}\right)} \\ \omega_{L.C.} = \sqrt{\frac{b_{1,v}}{b_{4,v}}} \end{cases} \quad (5-81)$$

όπου οι παράμετροι $b_{i,v}$ ορίζονται στην Εξ. (5-59).

Στον Πίν. 5-6 που παρατίθεται στη συνέχεια φαίνονται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων που έγιναν στο σύστημα του Σχ. 5-2 (τα $G_L(s)$, $N(X)$ ορίζονται στις Εξ. (5-64), (5-66)), για την επιβεβαίωση του κριτηρίου που εκφράζει η Εξ. (5-46). Το σύστημα μοντελοποιήθηκε στο Matlab/Simulink, από το οποίο λαμβάνεται η έξοδος του συστήματος (ταχύτητα σώματος).

Το σύστημα που χρησιμοποιήθηκε στις προσομοιώσεις έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

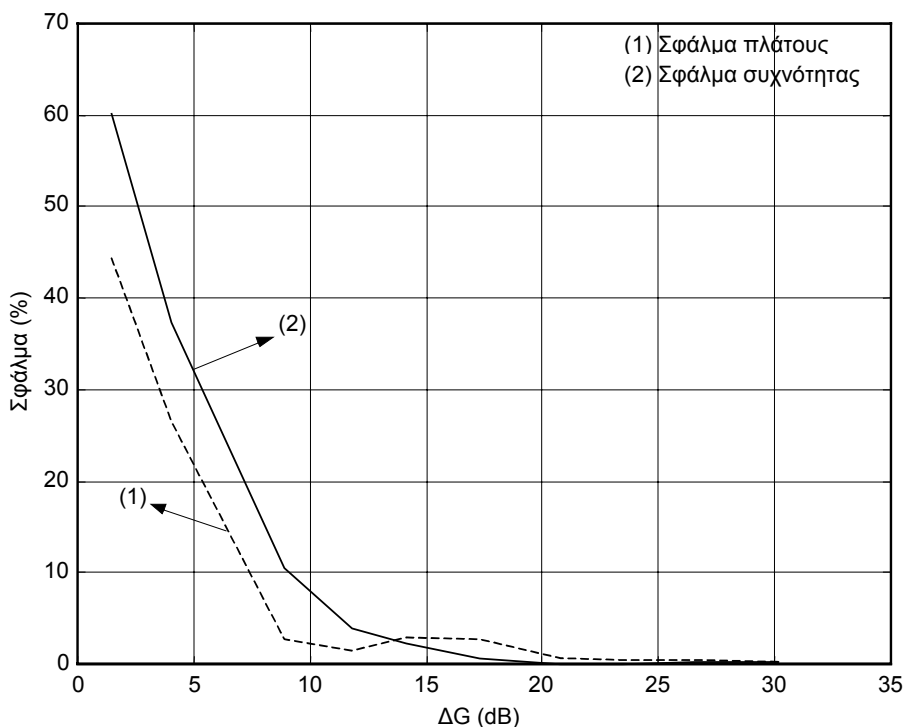
$$\Delta T_c = -0.042 Nm, \Delta b = 0 Nm sec/rad, R_a = 10 Ohm, \\ K_T = 0.105 Nm/A, K = 0 Nm/rad, J = 0.0003 Kgm^2, B = 0 Nm sec/rad$$

Η επιλογή των παραμέτρων έγινε με τα ίδια κριτήρια με τα οποία έγινε η επιλογή των παραμέτρων του συστήματος 2^{ης} τάξης, βλ. Εξ. (5-45).

Πίνακας 5-6. Σύγκριση των θεωρητικών τιμών του πλάτους και της συχνότητας του L.C. με εκείνες που προέκυψαν με προσομοίωση στο Matlab/Simulink για συστήματα 2^{ης} τάξης με έλεγχο τάσης και PID κατευθυντή.

α.α.	K_i	K_d	K_p	$\omega_{L.C.}$	$\omega_{L.C.,s}$	$e_\omega(\%)$	$X_{L.C.}$	$X_{L.C.,s}$	$e_X(\%)$	ΔG	St
1	1.0	0.500	0.50	4.183	1.670	60.1	8.835	12.76	44.4	1.448	1
2	1.0	0.200	0.50	4.183	2.620	37.4	18.42	23.29	26.4	4.017	1
3	1.0	0.050	0.50	4.183	3.750	10.4	40.28	41.38	2.70	8.920	1
4	1.0	0.010	0.50	4.183	4.020	3.90	58.93	58.06	1.50	11.84	1
5	1.0	0.010	0.90	5.613	5.490	2.20	58.93	57.25	2.90	14.18	1
6	1.0	0.010	1.90	8.155	8.100	0.70	58.93	57.34	2.70	17.27	1
7	1.0	0.001	3.50	11.07	11.08	0.10	65.78	65.29	0.70	20.81	1
8	1.0	0.001	6.50	15.08	15.10	0.10	65.78	65.44	0.50	23.46	1
9	1.0	0.001	13.5	21.74	21.78	0.20	65.78	65.52	0.40	26.62	1
10	1.0	0.001	30.5	32.67	32.73	0.20	65.78	65.56	0.30	30.15	1

Από τα στοιχεία του Πίν. 5-6 σχεδιάζεται η ακόλουθη γραφική παράσταση:



Σχήμα 5-16. Γραφική παράσταση του σφάλματος στην προσέγγιση της τιμής του πλάτους και της συχνότητας του L.C για την περίπτωση ενός συστήματος 2^{ης} τάξης με PID κατευθυντή.

Από το Σχ. 5-16 επιβεβαιώνεται η ορθότητα του κριτηρίου της εξίσωσης (5-46), το οποίο μπορεί να επιβεβαιωθεί και για οποιαδήποτε άλλη αριθμητική επιλογή των στοιχείων του συστήματος. Κατά συνέπεια, προκύπτει το ακόλουθο συμπέρασμα:

Συμπέρασμα 5-10:

Σε ένα σύστημα 2^{ης} τάξης, μιας μάζας, με τριβή που δίνεται από το κλασσικό μοντέλο τριβής (Coulomb+ιξώδη τριβή), με έλεγχο τάσης και με PID κατευθυντή η ακρίβεια στον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών του L.C. εξαρτάται άμεσα από την διαφορά λογαριθμικού μέτρου, στο διάγραμμα Bode της συνάρτησης μεταφοράς του γραμμικού τμήματος του συστήματος, μεταξύ των συχνοτήτων $\omega_{L.C.}$ και $3\omega_{L.C.}$. Μάλιστα, αν η διαφορά αυτή είναι μεγαλύτερη από «20dB» η ακρίβεια είναι εξαιρετική.

(β) Έλεγχος με πηγή ρεύματος

Με τρόπο ανάλογο με εκείνον που εφαρμόστηκε στην περίπτωση του ελέγχου με πηγή τάσης προκύπτει ότι το πλάτος και η συχνότητα στην περίπτωση του ελέγχου με πηγή ρεύματος είναι:

$$\begin{cases} X_{L.C.} = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-b_{2,i} \cdot \omega^2) \cdot (-b_{3,i} \cdot \omega^2 + b_{0,i})}{(-b_{3,i} \cdot \omega^2 + b_{0,i})^2 + (-b_{4,i} \cdot \omega^3 + b_{1,i} \cdot \omega)^2} \\ \omega_{L.C.} = \sqrt{\frac{b_{1,i}}{b_{4,i}}} \end{cases} \quad (5-82)$$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{cases} X_{L.C.} = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\left(-b_{2,i} \cdot \frac{b_{1,i}}{b_{4,i}}\right)}{\left(-b_{3,i} \cdot \frac{b_{1,i}}{b_{4,i}} + b_{0,i}\right)} \\ \omega_{L.C.} = \sqrt{\frac{b_{1,i}}{b_{4,i}}} \end{cases} \quad (5-83)$$

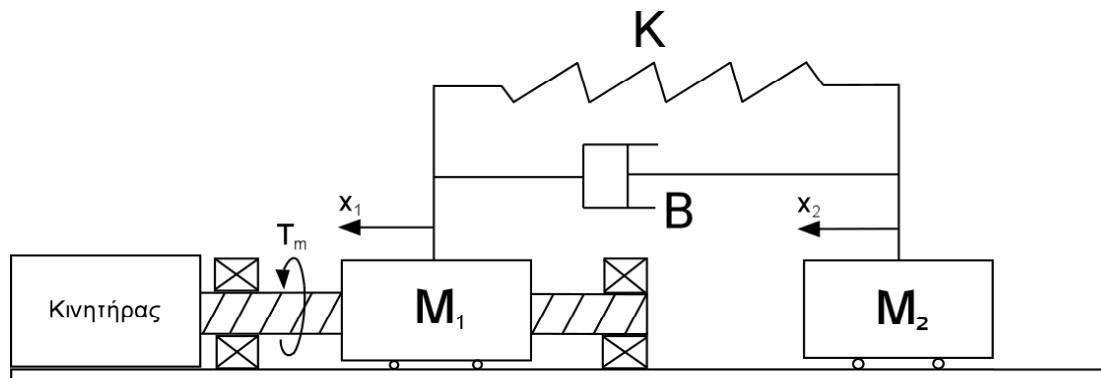
όπου οι παράμετροι $b_{i,i}$ ορίζονται στην Εξ. (5-61).

Επιπλέον, δεδομένου ότι η δομή του συστήματος σ' αυτήν την περίπτωση δεν αλλάζει, το συμπέρασμα 5-10 ισχύει και για την περίπτωση του ελέγχου με πηγή ρεύματος.

5.2.4 Συστήματα 4^{ης} τάξης με PD έλεγχο

5.2.4.1 Μοντελοποίηση

Έστω ένα σύστημα 4^{ης} τάξης, δύο μαζών, το οποίο μπορεί να ολισθαίνει όταν σ' αυτό ασκηθεί μια εξωτερική δύναμη. Θεωρείται ότι η δύναμη αυτή ασκείται από έναν κινητήρα που είναι άμεσα συνδεδεμένος με την μία εκ των δύο μαζών (π.χ. μέσω ενός κοχλία-οδηγού):



Σχήμα 5-17. Σύστημα 4ης τάξης, δύο μαζών συνδεδεμένων με ελατήριο και αποσβεστήρα.

Έστω ότι η δύναμη τριβής που εμφανίζεται κατά την κίνηση της μάζας M_1 μαζί με την αντίστοιχη δύναμη της τριβής αντιστάθμισης περιγράφονται από το κλασσικό μοντέλο τριβής (Coulomb+ιξώδη τριβή), οπότε η συνολική δύναμη τριβής θα δίνεται από την εξίσωση:

$$\Delta F_{f,1} = \Delta b_1 \dot{x}_1 + \Delta F_{c,1} \operatorname{sgn}(\dot{x}_1) \quad (5-84)$$

όπου:

$\Delta b_1 = b_1 - b'_1$ είναι η διαφορά της εκτίμησης της τιμής του συντελεστή ιξώδους τριβής, b'_1 , από την πραγματική του τιμή, b_1 ,
 $\Delta F_{c,1} = F_{c,1} - F'_{c,1}$ είναι η διαφορά της εκτίμησης της τιμής της τριβής Coulomb, $F'_{c,1}$ από την πραγματική της τιμή, $F_{c,1}$,

Για λόγους απλοποίησης του προβλήματος θα θεωρηθεί ότι η τριβή στην μάζα M_2 είναι αμελητέα.

Τότε, το σύστημα του Σχ. 5-15 διέπεται από τις εξής διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1 = -B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \Delta F_{f,1} - K(x_1 - x_2) + F_m \\ M_2 \ddot{x}_2 = B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K(x_1 - x_2) \end{cases} \quad (5-85)$$

ή ισοδύναμα, λαμβανομένου υπόψη της Εξ. (5-84), από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1 = -B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \Delta F_{c,1} \operatorname{sgn}(\dot{x}_1) - \Delta b_1 \dot{x}_1 - K(x_1 - x_2) + F_m \\ M_2 \ddot{x}_2 = B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K(x_1 - x_2) \end{cases} \quad (5-86)$$

όπου:

M_1, M_2 οι δύο κινούμενες μάζες. Στην μάζα M_1 συμπεριλαμβάνονται και οι μάζες των περιστρεφόμενων τμημάτων (κοχλίας, κινητήρας),
 F_m η δύναμη που ασκείται στην μάζα M_1 από τον κινητήρα,
 B το στοιχείο απόσβεσης,
 K η σταθερά του ελατηρίου,
 x_1, x_2 οι γραμμικές μετατοπίσεις των δύο κινούμενων μαζών, M_1, M_2 , αντίστοιχα.

Αν υποθεθεί ότι ο κινητήρας αποτελεί τμήμα του συστήματος και ότι ο έλεγχος γίνεται με πηγή τάσης, τότε το σύστημα διέπεται από μία επιπλέον εξίσωση, που είναι η εξής:

$$\begin{cases} V_s(t) = L \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + \frac{K_T}{m} \dot{x}_1 \\ F_m = \frac{K_T}{m} i_a \end{cases} \quad (5-87)$$

όπου m είναι ο συντελεστής μετασχηματισμού του κοχλία-οδηγού.

Θεωρώντας αμελητέα την επίδραση της αυτεπαγωγής των τυλιγμάτων του δρομέα, δηλαδή $L = 0$, από την Εξ. (5-87) προκύπτει ότι:

$$F_m = \frac{K_T}{m} \cdot \frac{V_s(t) - \frac{K_T}{m} \dot{x}_1}{R_a} \quad (5-88)$$

Από τις Εξ. (5-86) και (5-88) προκύπτει:

$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1 = -B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \Delta b_1 \dot{x}_1 + \Delta F_{c,1} \operatorname{sgn}(\dot{x}_1) - K(x_1 - x_2) + \frac{K_T}{m} \cdot \frac{V_s(t) - \frac{K_T}{m} \dot{x}_1}{R_a} \\ M_2 \ddot{x}_2 = B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K(x_1 - x_2) \end{cases} \quad (5-89)$$

Αν αντικατασταθεί η "on-off" μη γραμμικότητα, $\operatorname{sgn}(\dot{x}_1)$, με την αντίστοιχη D.F., τότε η Εξ. (5-89) ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1 + \left[B + \Delta b_1 + \Delta F_{c,1} N(X) + \frac{K_T^2}{R_a m^2} \right] \dot{x}_1 + K x_1 = B \dot{x}_2 + K x_2 + K_T \frac{V_s(t)}{R_a m} \\ M_2 \ddot{x}_2 + B \dot{x}_2 + K x_2 = B \dot{x}_1 + K x_1 \end{cases} \quad (5-90)$$

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace την Εξ. (5-90) προκύπτει:

$$\begin{cases} \left[M_1 s^2 + \left(B + \Delta b_1 + \Delta F_{c,1} N(X) + \frac{K_T^2}{R_a m^2} \right) s + K \right] X_1(s) = (Bs + K) X_2(s) + K_T \frac{V_s(s)}{R_a m} \\ \left[M_2 s^2 + Bs + K \right] X_2(s) = (Bs + K) X_1(s) \end{cases} \quad (5-91)$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εκ των εξισώσεων της Εξ. (5-91) την συνάρτηση $X_2(s)$ από την δεύτερη προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς της εγκατάστασης, που είναι η εξής:

$$\begin{aligned} G_{plant} &= \frac{X_1(s)}{V_s(s)} = \\ &= \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{d_4 s^4 + [d_{3,1} + d_{3,2} N(X)] s^3 + [d_{2,1} + d_{2,2} N(X)] s^2 + [d_{1,1} + d_{1,2} N(X)] s + d_0} \end{aligned} \quad (5-92)$$

όπου:

$$c_0 = \frac{K_T}{R_a m} K, \quad c_1 = \frac{K_T}{R_a m} B, \quad c_2 = \frac{K_T}{R_a m} M_2,$$

$$d_0 = 0,$$

$$d_{1,1} = K \left(\Delta b_1 + B + \frac{K_T^2}{R_a m^2} \right) - BK, \quad d_{1,2} = K \Delta F_{c,1},$$

$$d_{2,1} = B \left(\Delta b_1 + B + \frac{K_T^2}{R_a m^2} \right) + M_1 K + M_2 K - B^2, \quad d_{2,2} = B \Delta F_{c,1},$$

$$d_{3,1} = M_2 \left(\Delta b_1 + B + \frac{K_T^2}{R_a m^2} \right) + M_1 B, \quad d_{3,2} = M_2 \Delta F_{c,1},$$

$$d_4 = M_1 M_2.$$

Αν σ' αυτό το σύστημα εισαχθεί ένας PD κατευθυντής, τότε προκύπτει το δομικό διάγραμμα του Σχ. 5-10. Σ' αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος δίνεται από την εξίσωση:

$$G_{total} = \frac{K_p G_{plant}}{1 + K_d G_{plant} s + K_p G_{plant}} \quad (5-93)$$

ή ισοδύναμα από την εξίσωση:

$$G_{total} = \frac{c'_2 s^2 + c'_1 s + c'_0}{d'_4 s^4 + [d'_{3,1} + d'_{3,2} N(X)] s^3 + [d'_{2,1} + d'_{2,2} N(X)] s^2 + [d'_{1,1} + d'_{1,2} N(X)] s + d'_0} \quad (5-94)$$

όπου:

$$c'_0 = K_p c_0, \quad c'_1 = K_p c_1, \quad c'_2 = K_p c_2$$

$$d'_0 = K_p c_0,$$

$$d'_{1,1} = d_{1,1} + K_d c_0 + K_p c_1, \quad d'_{1,2} = d_{1,2},$$

$$d'_{2,1} = d_{2,1} + K_d c_1 + K_p c_2, \quad d'_{2,2} = d_{2,2},$$

$$d'_{3,1} = d_{3,1} + K_d c_2, \quad d'_{3,2} = d_{3,2},$$

$$d'_4 = d_4.$$

Επίσης, η χαρακτηριστική εξίσωση του συνολικού συστήματος δίνεται από την εξίσωση:

$$1 + K_d G_{plant} s + K_p G_{plant} = 0 \quad (5-95)$$

ή ισοδύναμα από την εξίσωση:

$$d'_4 s^4 + [d'_{3,1} + d'_{3,2} N(X)] s^3 + [d'_{2,1} + d'_{2,2} N(X)] s^2 + [d'_{1,1} + d'_{1,2} N(X)] s + d'_0 = 0 \quad (5-96)$$

5.2.4.2 Εφαρμογή της M.E.D.F.

Απομονώνοντας το μη γραμμικό τμήμα του συστήματος, που εκφράζεται από την D.F.

$N(X)$, η Εξ. (5-96) γράφεται:

$$-\frac{1}{N(X)} = \frac{d'_{3,2} s^3 + d'_{2,2} s^2 + d'_{1,2} s}{d'_4 s^4 + d'_{3,1} s^3 + d'_{2,1} s^2 + d'_{1,1} s + d'_0} \quad (5-97)$$

Αν τεθεί:

$$G_L(s) = \frac{d'_{3,2} s^3 + d'_{2,2} s^2 + d'_{1,2} s}{d'_4 s^4 + d'_{3,1} s^3 + d'_{2,1} s^2 + d'_{1,1} s + d'_0} \quad (5-98)$$

τότε η Εξ. (5-97) γράφεται:

$$-\frac{1}{N(X)} = G_L(s) \quad (5-99)$$

όπου:

$$N(X) = \frac{4}{\pi X} \quad (5-100)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (5-98) το s με το $j\omega$ προκύπτει:

$$G_L(j\omega) = \frac{(-d'_{2,2}\omega^2) + (d'_{1,2}\omega - d'_{3,2}\omega^3)j}{(d'_4\omega^4 - d'_{2,1}\omega^2 + d'_0) + (-d'_{3,1}\omega^3 + d'_{1,1}\omega)j} \quad (5-101)$$

Αν τεθεί:

$$\begin{aligned} P &= -d'_{2,2}\omega^2 \\ Q &= d'_{1,2}\omega - d'_{3,2}\omega^3 \\ R &= d'_4\omega^4 - d'_{2,1}\omega^2 + d'_0 \\ S &= -d'_{3,1}\omega^3 + d'_{1,1}\omega \end{aligned} \quad (5-102)$$

τότε η Εξ. (5-40) γράφεται:

$$G_L(j\omega) = \frac{PR + QS}{R^2 + S^2} + \frac{QR - PS}{R^2 + S^2} j \quad (5-103)$$

Για να εντοπιστεί L.C. θα πρέπει σύμφωνα με τις Εξ. (5-99), (5-100) η εξίσωση:

$$G_L(j\omega) = -\frac{\pi \cdot X}{4} \quad (5-104)$$

να έχει λύση. Δεδομένου, όμως, ότι το πλάτος του L.C. είναι $X > 0$, για να έχει η Εξ. (5-104) λύση θα πρέπει, σύμφωνα με την Εξ. (5-103), να ισχύει:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{G_L(j\omega)\} < 0 \\ \operatorname{Im}\{G_L(j\omega)\} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P \cdot R + Q \cdot S < 0 \\ Q \cdot R - P \cdot S = 0 \end{cases} \quad (5-105)$$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{cases} (-d'_{2,2}\omega^2) \cdot (d'_4\omega^4 - d'_{2,1}\omega^2 + d'_0) + (d'_{1,2}\omega - d'_{3,2}\omega^3) \cdot (-d'_{3,1}\omega^3 + d'_{1,1}\omega) < 0 \\ (d'_{1,2}\omega - d'_{3,2}\omega^3) \cdot (d'_4\omega^4 - d'_{2,1}\omega^2 + d'_0) - (-d'_{2,2}\omega^2) \cdot (-d'_{3,1}\omega^3 + d'_{1,1}\omega) = 0 \end{cases} \quad (5-106)$$

Η δεύτερη από τις δύο συνθήκες στην Εξ. (5-106) είναι εξίσωση έβδομης τάξης, και θα πρέπει να λυθεί ως προς την συχνότητα ω προκειμένου να βρεθεί από την πρώτη ανισότητα η συνθήκη εντοπισμού του L.C. ως μία συνάρτηση ανεξάρτητη της συχνότητας ω . Επειδή η επίλυση της εξίσωσης έβδομης τάξης με συμβολικό τρόπο είναι αρκετά πολύπλοκη, και μάλιστα αν το σύστημα ήταν ακόμα υψηλότερης τάξης τότε η εξίσωση θα ήταν και αυτή περισσότερο πολύπλοκη, είναι αναγκαίο σε συστήματα όπως το συγκεκριμένο η εξαγωγή συμπερασμάτων να γίνει μέσω προσομοιώσεων.

Συγκεκριμένα, μετά από την εκτέλεση ικανού αριθμού προσομοιώσεων στο Matlab/Simulink προκύπτουν συμπεράσματα ανάλογα με εκείνα τα οποία προέκυψαν για συστήματα 2^{ης} τάξης. Ενδεικτικά παρατίθενται ορισμένα από τα αποτελέσματα της προσομοίωσης στον Πίν. 5-7.

Το σύστημα που χρησιμοποιήθηκε στις προσομοιώσεις έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

$$\begin{aligned} \Delta F_{c,1} &= -0.042N, \Delta b_1 = -0.2N \text{ sec}/m, K = 0.01N/m, B = 0.01N \text{ sec}/m, \\ M_1 &= 0.1Kg, M_2 = 0.1Kg, m = 0.1m/rad, K_T = 0.105Nm/A, R_a = 10Ohm, \end{aligned} \quad (5-107)$$

Η επιλογή των παραμέτρων έγινε με τα ίδια κριτήρια με τα οποία έγινε η επιλογή των παραμέτρων του συστήματος 2^{ης} τάξης, βλ. Εξ. (5-45).

Πίνακας 5-7. Σύγκριση των θεωρητικών τιμών του πλάτους και της συχνότητας του L.C. με εκείνες που προέκυψαν με προσομοίωση στο Matlab/Simulink για συστήματα 4^{ης} τάξης με PD κατευθυντή.

α.α.	K_p	K_d	$\omega_{L.C.}$	$\omega_{L.C.,s}$	e_ω	$X_{L.C.}$	$X_{L.C.,s}$	e_X	ΔG	St
	$\left(\frac{V}{m}\right)$	$\left(\frac{V \text{ sec}}{m}\right)$	$\left(\frac{rad}{sec}\right)$	$\left(\frac{rad}{sec}\right)$	(%)	$\left(\frac{m}{sec}\right)$	$\left(\frac{m}{sec}\right)$	(%)	(dB)	
1	400	10	20.496	19.988	2.48	0.0551	0.0522	5.26	3.638	1
2	400	9	20.496	20.108	1.90	0.0618	0.0580	6.15	4.535	1
3	400	8	20.496	20.221	1.34	0.0704	0.0655	6.96	5.566	1
4	400	7	20.496	20.315	0.88	0.0817	0.0755	7.59	6.772	1

5	400	6	20.496	20.390	0.52	0.0972	0.0893	8.13	8.209	1
6	400	5	20.496	20.453	0.21	0.1202	0.1097	8.70	9.976	1
7	400	4	20.496	20.510	0.066	0.1572	0.1480	5.85	12.25	1
8	400	2	20.496	20.566	0.34	0.4108	0.4065	1.05	20.47	1
9	400	1	20.496	20.572	0.37	2.1186	2.1300	0.54	34.68	1
10	400	0.5	20.496			-1.964			33.99	0
11	400	0.2	20.496			-0.911			27.31	0
12	400	0.1	20.496			-0.773			25.88	0
13	400	0.05	20.496			-0.718			25.24	0
14	400	0.02	20.496			-0.689			24.88	0
15	400	0.01	20.496			-0.680			24.76	0

Η ευστάθεια του συστήματος χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής, που καθορίζεται από τον δείκτη St , μπορεί να βρεθεί με την βοήθεια του κριτηρίου ευστάθειας των Routh-Harwitz. Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος 4^{ης} τάξης χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής είναι η εξής:

$$d'_4 s^4 + d'_{3,1} s^3 + d'_{2,1} s^2 + d'_{1,1} s + d'_0 = 0 \quad (5-108)$$

Δεδομένου ότι $d'_4, d'_0 > 0$, δηλαδή υπάρχουν συντελεστές οι οποίοι είναι θετικοί αριθμοί, για να είναι το σύστημα χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής ευσταθές θα πρέπει αφ' ενός μεν και οι υπόλοιποι συντελεστές του πολυωνύμου να είναι θετικοί αριθμοί, δηλαδή:

$$\begin{cases} d'_{1,1} > 0 \\ d'_{2,1} > 0 \\ d'_{3,1} > 0 \end{cases} \quad (5-109)$$

αφ' ετέρου να ισχύει:

$$\begin{cases} d'_{2,1} - \frac{d'_0 \cdot d'_{3,1}}{d'_{1,1}} > 0 \\ d'_{3,1} - \frac{d'_4 \cdot d'_{1,1}}{d'_{2,1} - \frac{d'_0 \cdot d'_{3,1}}{d'_{1,1}}} > 0 \end{cases} \quad (5-110)$$

Εξετάζοντας τις συνθήκες ευστάθειας στις Εξ. (5-109), (5-110), για το σύστημα χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής, προκύπτει ότι η πολυπλοκότητά τους δεν επιτρέπει την δημιουργία μιας αλγεβρικής σχέσης μεταξύ της ευστάθειας του συστήματος

και του κριτηρίου εμφάνισης L.C. Γι' αυτόν τον λόγο μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της προσομοίωσης προκειμένου να εξαχθεί μία ποιοτική σχέση.

Για παράδειγμα, από τον Πίν. 5-7 προκύπτει ότι όταν λαμβάνεται:

$$\Delta F_{c,1} = -0.042 N, \Delta b_1 = -0.2 N \text{ sec} / m \quad (5-111)$$

ενώ τα κέρδη του PD κατευθυντή είναι ίσα με:

$$K_p = 400 V / m, K_d = 0.5 V \text{ sec} / m \quad (5-112)$$

τότε, το σύστημα χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής είναι ασταθές, και το θεωρητικά υπολογισμένο πλάτος του L.C. είναι ίσο με:

$$X_{L.C.} = -1.9637 m / \text{sec} \quad (5-113)$$

Αυτό σημαίνει ότι δεν εμφανίζεται L.C., πράγμα που σημαίνει ότι όταν $\Delta F_{c,1} < 0$, και το σύστημα χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής είναι ασταθές, δεν εμφανίζεται L.C.

Επίσης, από τον Πίν. 5-7 προκύπτει ότι η μεταβολή του κέρδους K_d επηρεάζει την εμφάνιση L.C. Με άλλα λόγια, στην περίπτωση ενός συστήματος 4^{ης} τάξης με PD κατευθυντή, όπως και στην περίπτωση ενός συστήματος 2^{ης} τάξης με PID κατευθυντή, ο εντοπισμός L.C. εξαρτάται απ' όλους τους κατευθυντές.

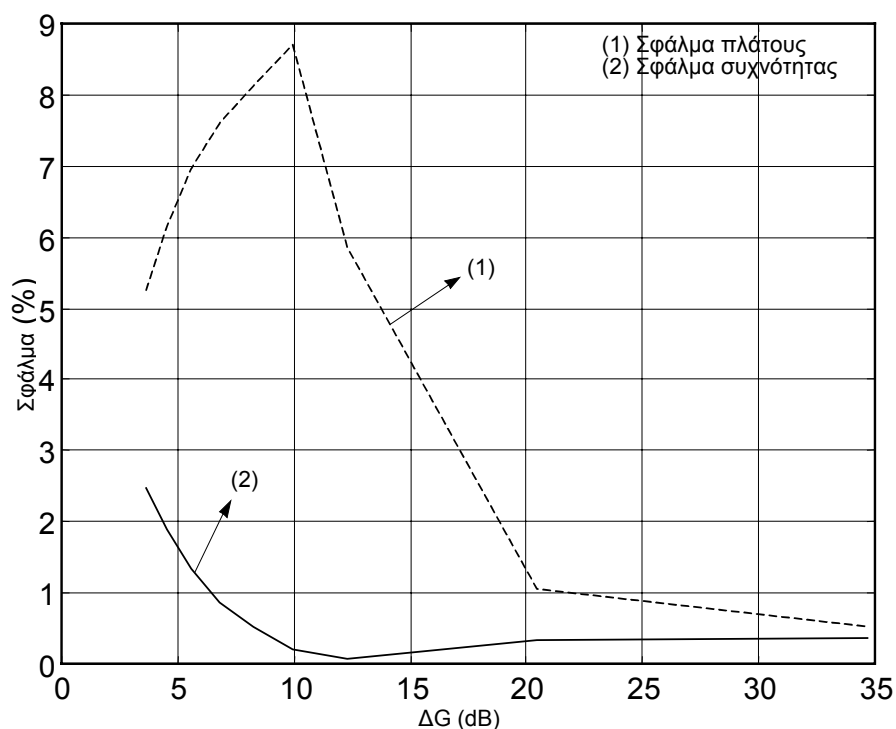
Συνοψίζοντας, προκύπτει το ακόλουθο συμπέρασμα:

Συμπέρασμα 5-11:

Σε ένα σύστημα 4^{ης} τάξης, με δύο μάζες, με τριβή που δίνεται από το κλασσικό μοντέλο τριβής (Coulomb+εξώδη τριβή), με έλεγχο τάσης και με PD κατευθυντή, αν δεν υπάρχει αντιστάθμιση της τριβής, δηλαδή $\Delta F_{c,1} = F_{c,1} > 0$, ή αν υπάρχει αντιστάθμιση της τριβής χρησιμοποιώντας το κλασσικό μοντέλο τριβής με $\Delta F_{c,1} > 0$, L.C. θα εμφανιστεί αν και μόνον αν το σύστημα χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής είναι ασταθές. Στην περίπτωση που υπάρχει αντιστάθμιση της τριβής με $\Delta F_{c,1} < 0$, L.C. θα εμφανιστεί αν και μόνον αν το σύστημα χωρίς την μη γραμμικότητα της τριβής είναι ευσταθές.

Ωστόσο, ο εντοπισμός L.C. μπορεί να αποφευχθεί με κατάλληλη μεταβολή των κερδών του κατευθυντή, αφού η συνθήκη εντοπισμού εξαρτάται από όλα τα κέρδη.

Επιπλέον, όσον αφορά την ακρίβεια στον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών του L.C., από τα στοιχεία του Πίν. 5-6 σχεδιάζεται η ακόλουθη γραφική παράσταση:



Σχήμα 5-18. Γραφική παράσταση του σφάλματος στην προσέγγιση της τιμής του πλάτους και της συχνότητας του L.C. για την περίπτωση ενός συστήματος 4^{ης} τάξης με PD κατευθυντή.

Από το Σχ. 5-18 προκύπτει η επιβεβαίωση της ορθότητας του κριτηρίου της εξίσωσης (5-46) στην περίπτωση ενός συστήματος 4^{ης} τάξης. Βέβαια, θα ήταν προτιμότερο να οδηγηθεί το σύστημα σε περιοχή λειτουργίας όπου δεν εντοπίζεται L.C., αφού πάντοτε, ανεξαρτήτως των τιμών που έχουν τα στοιχεία του συστήματος, ο εντοπισμός L.C. μπορεί να αποφευχθεί.

Συνοψίζοντας, προκύπτει το ακόλουθο συμπέρασμα:

Συμπέρασμα 5-12:

Σε ένα σύστημα 4^{ης} τάξης, δύο μαζών, με τριβή που δίνεται από το κλασσικό μοντέλο τριβής (Coulomb+ιξώδη τριβή), με έλεγχο τάσης και με PD κατευθυντή, η ακρίβεια στον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών του L.C. εξαρτάται άμεσα από την διαφορά λογαριθμικού μέτρου στο διάγραμμα Bode της συνάρτησης μεταφοράς του γραμμικού τμήματος του συστήματος, μεταξύ των συχνοτήτων $\omega_{L.C.}$ και $3\omega_{L.C.}$. Μάλιστα αν η διαφορά αυτή είναι μεγαλύτερη από «20dB» τότε η ακρίβεια είναι εξαιρετική.

5.2.5 Η επίδραση της στατικής τριβής στην M.E.D.F.

Ένα ερώτημα, που είναι πολύ ενδιαφέρον να απαντηθεί, είναι το πως επιδρά στα αποτελέσματα της ανάλυσης με M.E.D.F. η ενσωμάτωση στο μοντέλο τριβής της στατικής τριβής.

Γι' αυτόν τον λόγο, εξετάζεται η περίπτωση κατά την οποία η τριβή της εγκατάστασης περιγράφεται από το γενικό κινητικό μοντέλο τριβής, βλ. Παρ. 3.1.2, το οποίο ενσωματώνει την στατική τριβή, ενώ το μοντέλο τριβής αντιστάθμισης στον κατευθυντή είναι το κλασσικό μοντέλο, Coulomb+ξιώδης τριβή, βλ. Παρ. 3.1.1. Έτσι, η ροπή τριβής στην εγκατάσταση δίνεται από την εξίσωση:

$$T_f = \begin{cases} T_f(\dot{\theta}) , & \alpha\nu \quad \dot{\theta} \neq 0 \\ T_e , & \alpha\nu \quad \dot{\theta} = 0 , \quad |T_e| < T_s \\ T_s \cdot \text{sgn}(T_e) , & \alpha\nu \quad \dot{\theta} = 0 , \quad |T_e| > T_s \end{cases} \quad (5-114)$$

με:

$$T_f(\dot{\theta}) = \left[T_c + (T_s - T_c) \cdot \exp\left(-|\dot{\theta}/\dot{\theta}_{str}|^2\right) \right] \cdot \text{sgn}(\dot{\theta}) + b \cdot \dot{\theta}$$

όπου:

T_s η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής ή η ροπή αποδέσμευσης (break-away torque),

T_e η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών,

$\dot{\theta}_{str}$ η γωνιακή ταχύτητα Stribeck,

ενώ η ροπή της τριβής αντιστάθμισης δίνεται από την εξίσωση:

$$T'_f = T'_c \text{sgn}(\dot{\theta}) + b'\dot{\theta} \quad (5-115)$$

όπου T'_f , T'_c , b' είναι οι εκτιμήσεις των T_f , T_c , b , αντίστοιχα.

Η επίδραση της στατικής τριβής στα αποτελέσματα της ανάλυσης με M.E.D.F. μπορεί να διακριθεί σε δύο ξεχωριστές επιδράσεις. Η μία αφορά την επίδραση της μέγιστης τιμής της στατικής τριβής ή της ροπής αποδέσμευσης, T_s , που συνήθως είναι μεγαλύτερη από την τριβή Coulomb, T_c . Η δεύτερη αφορά την επίδραση της προσκόλλησης (sticking), δηλαδή της περιοχής λειτουργίας στην οποία η ταχύτητα είναι μηδέν και η εξωτερικά επιβαλλόμενη ροπή είναι μικρότερη από την ροπή αποδέσμευσης. Στην συνέχεια τα αποτελέσματα των δύο επιμέρους επιδράσεων μπορούν με βάσει την αρχή της επαλληλίας να αθροιστούν για να προκύψει το αποτέλεσμα της συνολικής επίδρασης της στατικής τριβής.

5.2.5.1 Η επίδραση της ροπής αποδέσμευσης

Αν από το γενικό κινητικό μοντέλο τριβής, Εξ. (5-114), αφαιρεθεί το φαινόμενο της προσκόλλησης, τότε το μοντέλο τριβής ανάγεται στο εξής:

$$T_f = \begin{cases} T_f(\dot{\theta}), & \alpha\nu \dot{\theta} \neq 0 \\ 0, & \alpha\nu \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (5-116)$$

ή ισοδύναμα στο:

$$T_f = \left[T_c + (T_s - T_c) \exp\left(-\left|\dot{\theta}/\dot{\theta}_{str}\right|^2\right) \right] \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) + b\dot{\theta} \quad (5-117)$$

Άρα από την Εξ. (5-117) προκύπτει ότι το μη γραμμικό τμήμα της τριβής της εγκατάστασης είναι το:

$$T_{nl} = \left[T_c + (T_s - T_c) \exp\left(-\left|\dot{\theta}/\dot{\theta}_{str}\right|^2\right) \right] \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) \quad (5-118)$$

Επίσης, από την Εξ. (5-115) προκύπτει ότι το μη γραμμικό τμήμα της τριβής αντιστάθμισης είναι το εξής:

$$T'_{nl} = T'_c \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) \quad (5-119)$$

Η D.F. της μη γραμμικότητας της Εξ. (5-119) είναι η “on-off” D.F. η οποία δίνεται από την εξίσωση:

$$N'(X) = \frac{4T'_c}{\pi X} \quad (5-120)$$

ενώ η D.F. της μη γραμμικότητας της Εξ. (5-118) μπορεί να υπολογιστεί με βάσει τον ορισμό της D.F., βλ. Παρ. 4.2.1.

Σύμφωνα με τον ορισμό της D.F. αν υποτεθεί ότι η είσοδος σε ένα μη γραμμικό στοιχείο είναι ημιτονοειδής, δηλαδή:

$$\dot{\theta}(t) = X \sin(\omega t) \quad (5-121)$$

τότε η έξοδος είναι μία περιοδική συνάρτηση με περίοδο ίδια με εκείνη της εισόδου. Μάλιστα, γίνεται η παραδοχή ότι μόνο η βασική αρμονική συνιστώσα της εξόδου είναι σημαντική, οπότε αμελείται η επίδραση όλων των υψηλότερων αρμονικών.

Με βάσει αυτήν την παραδοχή η έξοδος του μη γραμμικού στοιχείου της εξίσωσης (5-118) είναι η εξής:

$$T_{nl}(t) = \left[T_c + (T_s - T_c) \exp\left(-\left|\frac{X \sin(\omega t)}{\dot{\theta}_{str}}\right|^2\right) \right] \operatorname{sgn}[X \sin(\omega t)] \quad (5-122)$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται:

$$T_{nl}(t) = \left[T_c + (T_s - T_c) \exp \left(-\frac{X^2 [1 - \cos(2\omega t)]}{2\dot{\theta}_{str}^2} \right) \right] \operatorname{sgn}[X \sin(\omega t)] \quad (5-123)$$

Αν γίνει η παραδοχή ότι μόνο η βασική συνιστώσα της εξόδου είναι σημαντική, τότε η έξοδος του μη γραμμικού στοιχείου προσεγγίζεται από την εξίσωση:

$$T_{nl,1}(t) = \left[T_c + (T_s - T_c) \exp \left(-\frac{X^2}{2\dot{\theta}_{str}^2} \right) \right] \cdot \left[\frac{4}{\pi} \sin(\omega t) \right] \quad (5-124)$$

Η D.F. του μη γραμμικού στοιχείου ορίζεται ως εξής:

$$N(X, \omega) = \frac{T_{nl,1}(t)}{\dot{\theta}(t)} = \frac{\left[T_c + (T_s - T_c) \exp \left(-\frac{X^2}{2\dot{\theta}_{str}^2} \right) \right] \cdot \left[\frac{4}{\pi} \sin(\omega t) \right]}{X \sin(\omega t)} \quad (5-125)$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται:

$$N(X) = \frac{4}{\pi X} \cdot \left[T_c + (T_s - T_c) \exp \left(-\frac{X^2}{2\dot{\theta}_{str}^2} \right) \right] \quad (5-126)$$

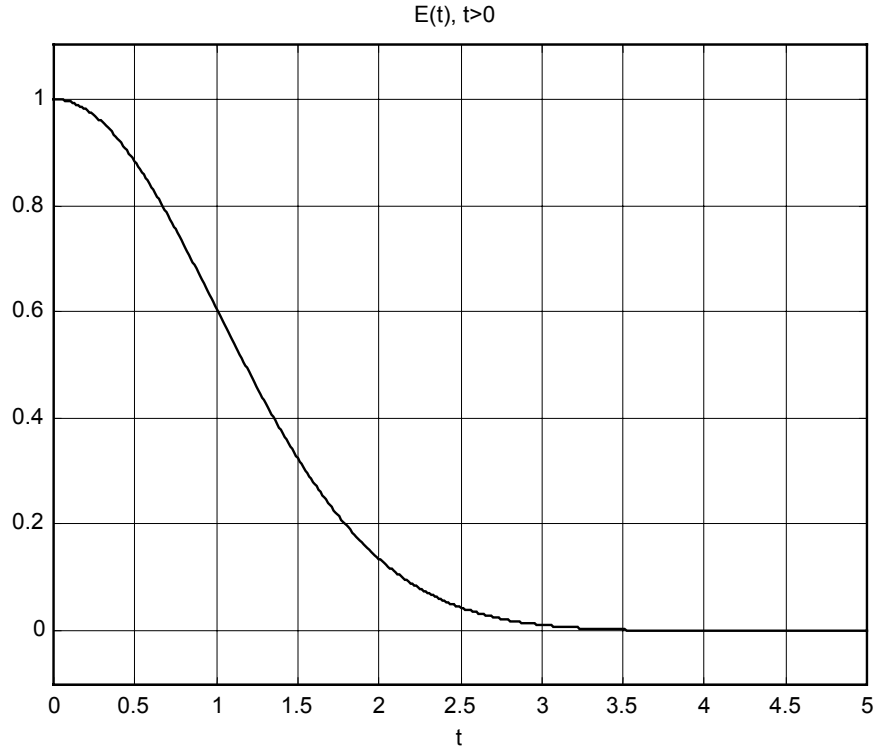
Από την Εξ. (5-126) φαίνεται ότι η ενσωμάτωση της ροπής αποδέσμευσης στο μοντέλο τριβής οδηγεί σε μία D.F. που είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, όπως συμβαίνει και στην περίπτωση της D.F. του μη γραμμικού τμήματος του κλασσικού μοντέλου τριβής, βλ. Εξ. (5-119). Αυτό σημαίνει ότι οι συνθήκες εντοπισμού L.C., οι οποίες προέκυψαν για την περίπτωση της χρησιμοποίησης του μοντέλου τριβής «Coulomb+εξώδης τριβή» ως το μοντέλο τριβής της εγκατάστασης, βλ. Παρ. 5.2.2.3, 5.2.3.2, 5.2.4.2, δεν επηρεάζονται από την ενσωμάτωση της ροπής αποδέσμευσης. Με άλλα λόγια ισχύει το ακόλουθο συμπέρασμα:

Συμπέρασμα 5-13:

Η ενσωμάτωση στο μοντέλο τριβής της ροπής αποδέσμευσης δεν επηρεάζει τα κριτήρια εντοπισμού L.C. τα οποία προέκυψαν χρησιμοποιώντας το μοντέλο τριβής Coulomb+εξώδης τριβή.

Παρ' όλα αυτά, η ροπή αποδέσμευσης επηρεάζει τα ποσοτικά χαρακτηριστικά του L.C., δηλαδή τις τιμές του πλάτους και της συχνότητας. Στο Σχ. 5-16, έχει παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση:

$$E(t) = \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right), t = \frac{X^2}{\dot{\theta}_{str}^2} > 0 \quad (5-127)$$



Σχήμα 5-19. Γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(t)$.

Από το Σχ. 5-19 προκύπτει ότι:

$$E(t) = 0, \quad t > 3.5 \quad (5-128)$$

οπότε, η Εξ. (5-126) γράφεται:

$$N(X) = \begin{cases} \frac{4}{\pi X} \cdot \left[T_c + (T_s - T_c) \exp\left(-\frac{X^2}{2\dot{\theta}_{str}^2}\right) \right], & X \leq \sqrt{3.5}\dot{\theta}_{str} \\ \frac{4}{\pi X} \cdot T_c, & X > \sqrt{3.5}\dot{\theta}_{str} \end{cases} \quad (5-129)$$

Από την Εξ. (5-129) προκύπτει ότι η ροπή αποδέσμευσης επιδρά στα ποσοτικά χαρακτηριστικά του L.C. μόνο για $X \leq \sqrt{3.5}\dot{\theta}_{str}$, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση δεν υπάρχει καμία επίδραση της ροπής αποδέσμευσης.

Από τις Εξ. (5-120), (5-129) προκύπτει ότι η D.F. του μη γραμμικού τμήματος της συνολικής τριβής του συστήματος (τριβή εγκατάστασης και αντιστάθμιση) είναι η εξής:

$$N_{total}(X) = N(X) - N'(X) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow N_{total}(X) = \begin{cases} \frac{4}{\pi X} \cdot \left[\Delta T_c + (T_s - T_c) \exp\left(-\frac{X^2}{2\dot{\theta}_{str}^2}\right) \right], & X \leq \sqrt{3.5}\dot{\theta}_{str} \\ \frac{4}{\pi X} \cdot \Delta T_c, & X > \sqrt{3.5}\dot{\theta}_{str} \end{cases} \quad (5-130)$$

5.2.5.2 Η επίδραση της προσκόλλησης

Στην περιοχή της προσκόλλησης η γωνιακή ταχύτητα είναι μηδενική και η ροπή τριβής δίνεται από την εξίσωση:

$$T_f = \begin{cases} T_e, & \alpha \nu \dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0, |T_e| < T_s \\ T_s \operatorname{sgn}(T_e), & \alpha \nu \dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0, |T_e| > T_s \end{cases} \quad (5-131)$$

Δεδομένου ότι στην μηδενική ταχύτητα υπάρχει μία αντίδραση στην εξωτερικώς επιβαλλόμενη ροπή, το κινούμενο σώμα θα ξεκινήσει αν και μόνον αν επιβληθεί μία ροπή ίση ή μεγαλύτερη από την ροπή αποδέσμευσης. Με άλλα λόγια, η συνθήκη εκκίνησης είναι η εξής:

$$T_e \geq T_s \quad (5-132)$$

Αφού η ενσωμάτωση της προσκόλλησης στο μοντέλο τριβής επηρεάζει την μετάβαση από την ακινησία στην κίνηση, οι συνθήκες εντοπισμού L.C. διαφοροποιούνται σε σύγκριση με εκείνες που προέκυψαν για την περίπτωση μόνο του κινητικού μέρους της τριβής.

Συγκεκριμένα, αν υποθεθεί, σύμφωνα με τα κριτήρια εντοπισμού L.C. για την περίπτωση του κινητικού μέρους της τριβής, ότι πρόκειται να εμφανιστεί L.C. τότε θα υπάρχει μία συνεχής μετάβαση από την ακινησία στην κίνηση και αντιστρόφως. Το γεγονός, όμως, ότι πάντοτε σε ένα L.C. υπάρχει ένα χρονικό διάστημα στο οποίο η ταχύτητα μηδενίζεται, σημαίνει ότι πάντοτε σε ένα L.C. θα υπεισέρχεται η επίδραση της προσκόλλησης. Με άλλα λόγια, το κινούμενο σώμα θα μπορέσει να εκτελέσει την κίνηση του L.C. αν και μόνον αν στα χρονικά διαστήματα της ακινησίας επιβάλλεται εξωτερική δύναμη που ικανοποιεί της συνθήκες εκκίνησης.

Ωστόσο, η συνθήκη της Εξ. (5-132) ισχύει εφ' όσον η κίνηση είναι ευσταθής, δηλαδή όταν η επιτάχυνση είναι περίπου ίση με το μηδέν, διότι το μοντέλο της Εξ. (5-131) προέκυψε υπό αυτήν την προϋπόθεση. Σε κινήσεις, όμως, όπως η κίνηση L.C., η οποία είναι κίνηση μεταβαλλόμενης ταχύτητας, η επιτάχυνση ή η επιβράδυνση μπορεί να είναι από πολύ μικρή έως πολύ μεγάλη, ανάλογα με τις τιμές του πλάτους και της συχνότητας του L.C. Αυτό σημαίνει ότι στα σημεία μηδενικής ταχύτητας, σε κίνηση L.C., δύσκολα μπορεί να θεωρηθεί ότι η επιτάχυνση ή η επιβράδυνση είναι περίπου ίση με το μηδέν.

Με βάσει αυτήν την παρατήρηση και λαμβανομένου υπόψη των πειραματικών παρατηρήσεων του Rabinowicz, βλ. [79] ή Παρ. 2.3.3, σύμφωνα με τις οποίες το επίπεδο της ροπής αποδέσμευσης εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο ο οποίος ξοδεύεται στην στατική περιοχή (στην προσκόλληση), προκύπτει ότι η ροπή αποδέσμευσης στην συνθήκη της Εξ. (5-132) και για την περίπτωση ενός L.C. είναι εν γένει ένα μεταβλητό μέγεθος, που θα εξαρτάται άμεσα από τα χαρακτηριστικά της εκάστοτε κίνησης. Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η ροπή αποδέσμευσης είναι η τριβή ολίσθησης ή η τριβή Coulomb.

Επομένως, όσον αφορά την επίδραση της προσκόλλησης στα αποτελέσματα της M.E.D.F. ισχύει το ακόλουθο συμπέρασμα:

Συμπέρασμα 5-14:

Η ενσωμάτωση στο μοντέλο τριβής της περιοχής της προσκόλλησης επηρεάζει τα κριτήρια εντοπισμού L.C., αφού απαραίτητη προϋπόθεση για να εμφανιστεί L.C. αποτελεί στα σημεία μηδενικής ταχύτητας η εξωτερικά εφαρμοζόμενη ροπή να είναι τουλάχιστον ίση με την ροπή αποδέσμευσης που αντιστοιχεί στα εκάστοτε χαρακτηριστικά μεγέθη του L.C.

Αν το μοντέλο της τριβής αντιστάθμισης είναι το μοντέλο Coulomb+ιξώδης τριβή, βλ. Εξ. (5-115), τότε η μόνη εξωτερική ροπή που ασκείται στο κινούμενο σώμα όταν η ταχύτητα είναι μηδενική είναι η ροπή του κατευθυντή. Γι' αυτόν τον λόγο μπορεί να γίνει η διάκριση μεταξύ της χρησιμοποίησης του PD και του PID κατευθυντή.

PD κατευθυντής

Αν η ροπή του PD κατευθυντή δίνεται από την εξίσωση:

$$T_{pd} = K_p \cdot (\theta_d - \theta) - K_d \cdot \dot{\nu} = K_p \cdot e - K_d \cdot \dot{\nu} \quad (5-133)$$

και η ταχύτητα είναι μηδενική, η εξωτερικά επιβαλλόμενη ροπή δίνεται από την εξίσωση:

$$T_e = K_p \cdot e \quad (5-134)$$

Επομένως, σύμφωνα με την Εξ. (5-132), κίνηση θα υπάρξει εφ' όσον ισχύει:

$$K_p \cdot e \geq T_s \quad (5-135)$$

PID κατευθυντής

Αν η ροπή του PID κατευθυντή δίνεται από την εξίσωση:

$$T_{pid} = K_p \cdot e + K_i \cdot \int_0^t e dt - K_d \cdot \dot{\nu} \quad (5-136)$$

και η ταχύτητα είναι μηδενική, η εξωτερικά επιβαλλόμενη ροπή δίνεται από την εξίσωση:

$$T_e = K_p \cdot e + K_i \cdot \int_0^t e dt \quad (5-137)$$

Επομένως, σύμφωνα με την Εξ. (5-131), κίνηση θα υπάρξει εφ' όσον ισχύει:

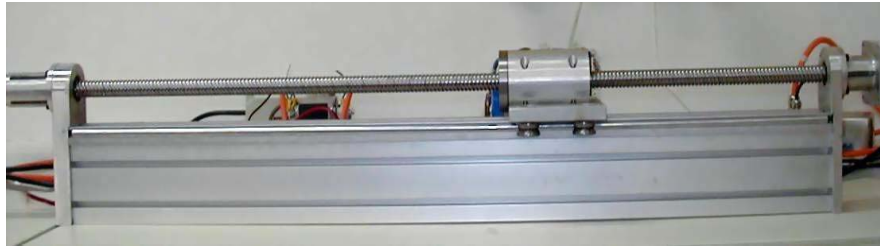
$$K_p \cdot e + K_i \cdot \int_0^t e dt \geq T_s \quad (5-138)$$

6 Αντιστάθμιση τριβής σε πειραματική διάταξη

6.1 Πειραματική διάταξη

6.1.1 Στοιχεία πειραματικής διάταξης

Για την εφαρμογή των σχεδίων αντιστάθμισης με μοντέλα τριβής χρησιμοποιήθηκε πειραματική διάταξη που αποτελείται από έναν «κοχλία-οδηγό». Πάνω σ' αυτόν είναι στερεωμένη, συμμετρικά ως προς τον άξονά του, μία μάζα, βλ. Σχ. 6-1. Έτσι, κατά την περιστροφή του κοχλία η μάζα κινείται ευθύγραμμα. Οι απώλειες κατά την κίνηση της μάζας είναι αρκετά σημαντικές, οπότε κύριο μέλημα αποτελεί ο περιορισμός των σφαλμάτων στην απόκριση θέσης της κινούμενης μάζας.



Σχήμα 6-1. Κοχλίας-οδηγός.

Για τον έλεγχο της κίνησης της μάζας χρησιμοποιείται ένας «κατευθυντής» (controller), βλ. Σχ. 6-2.



Σχήμα 6-2. Κατευθυντής.

Ο κατευθυντής αποτελείται από μία κάρτα, που προσαρμόζεται σε θύρα ISA στην μητρική ενός «ηλεκτρονικού υπολογιστή», βλ. Σχ. 6-3, και από ένα εξωτερικό module για την σύνδεση των υπολοίπων στοιχείων του συστήματος με τον κατευθυντή.



Σχήμα 6-3. Ηλεκτρονικός υπολογιστής (PC PENTIUM III 500MHz).

Στην προκειμένη περίπτωση, τα υπόλοιπα στοιχεία με τα οποία συνδέεται ο κατευθυντής είναι ένας «ενισχυτής εύρους παλμού» (PWM amplifier) με ικανότητα οδήγησης κινητήρων μέχρι και 250W, βλ. Σχ. 6-4.



Σχήμα 6-4. Ενισχυτής εύρους παλμού (PWM amplifier).

Η έξοδος του ενισχυτή συνδέεται με έναν «κινητήρα συνεχούς ρεύματος» (μόνιμου μαγνήτη), βλ. Σχ. 6-5, ο οποίος χρησιμοποιείται για να προσδώσει κίνηση στον κοχλία.



Σχήμα 6-5. Κινητήρας συνεχούς ρεύματος, 48 Volts, 70 Watt της MAXON MOTORS.

Στο πίσω μέρος του κινητήρα είναι συνδεδεμένη μία παλμογεννήτρια (encoder) για την μέτρηση της γωνιακής μετατόπισης του δρομέα του κινητήρα, βλ. Σχ. 6-6.



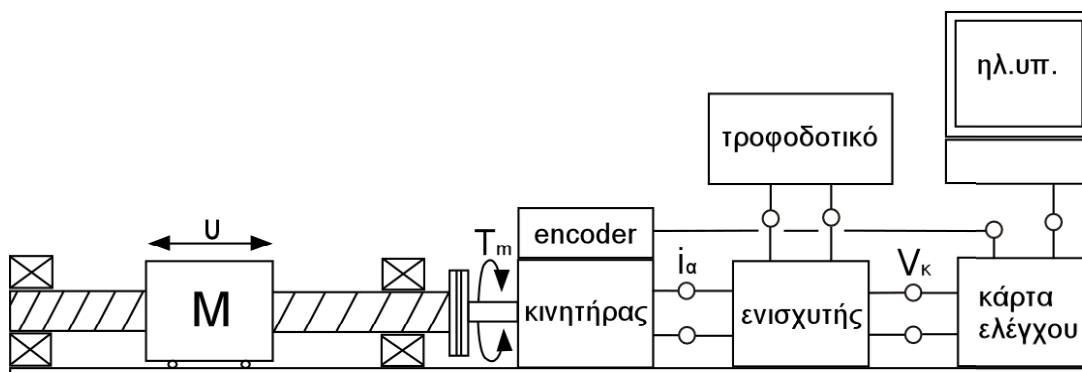
Σχήμα 6-6. Παλμογεννήτρια τύπου incremental της HEWLETT PACKARD.

Συμπερασματικά, η συνολική πειραματική διάταξη αποτελείται από τα εξής στοιχεία:

- ❑ κοχλίας-οδηγός,
- ❑ κατευθυντής (κάρτα ελέγχου),
- ❑ ηλεκτρονικός υπολογιστής,
- ❑ ενισχυτής εύρους παλμού,
- ❑ κινητήρας συνεχούς ρεύματος,
- ❑ παλμογεννήτρια.

6.1.2 Λειτουργία πειραματικής διάταξης

Ο τρόπος με τον οποίο συνεργάζονται τα στοιχεία της πειραματικής διάταξης εικονίζεται στο σχήμα:



Σχήμα 6-7. Δομή πειραματικής διάταξης.

Ο έλεγχος της κίνησης της μάζας, σύμφωνα με το Σχ. 6-7, ανάγεται στον στιγμιαίο έλεγχο της τιμής της ροπής στην έξοδο του κινητήρα. Η ροπή, όμως, στην έξοδο του κινητήρα είναι ανάλογη με την ένταση του ρεύματος στην είσοδό του, i_a . Μάλιστα, ο συντελεστής αναλογίας μεταξύ της ροπής εξόδου και της έντασης του ρεύματος εισόδου αποτελεί χαρακτηριστικό μέγεθος για τους τυποποιημένους κινητήρες συνεχούς ρεύματος (μόνιμου μαγνήτη), ονομάζεται «σταθερά ροπής» και στην προκειμένη περίπτωση είναι ίσος με:

$$K_T = \frac{T_m}{i_a} = 0.105 Nm / A \quad (6-1)$$

Έτσι ο έλεγχος της τιμής της ροπής στην έξοδο του κινητήρα μπορεί να αναχθεί σε έλεγχο της τιμής της έντασης του ρεύματος στην είσοδο του.

Για να μπορεί να γίνει ο έλεγχος της τιμής της έντασης ρεύματος στην είσοδο του κινητήρα, συνδέεται μ' αυτόν ο «ενισχυτής εύρους παλμού», ο οποίος δίνει ένταση ρεύματος ανάλογη της τάσης του ρεύματος εισόδου του, V_k . Μάλιστα, ο συντελεστής αναλογίας μεταξύ των δύο προηγούμενων μεγεθών είναι ρυθμιζόμενος και στην προκειμένη περίπτωση είναι ίσος με:

$$K_{amp} = \frac{i_a}{V_k} = 0.4 A / Volt \quad (6-2)$$

Μ' αυτόν τον τρόπο έχει αναχθεί ο έλεγχος της έντασης ρεύματος στην έξοδο του ενισχυτή σε έλεγχο της τάσης του ρεύματος στην είσοδο του, πράγμα που επιτυγχάνεται με την κάρτα ελέγχου. Ειδικότερα, η συγκεκριμένη κάρτα (GALIL DMC-1700) έχει την δυνατότητα να στέλνει οποιαδήποτε στιγμή στην έξοδό της την τάση ρεύματος που επιθυμούμε, χρησιμοποιώντας διαφόρων ειδών δεδομένα, όπως για παράδειγμα την θέση του δρομέα του κινητήρα που μετράται με την βοήθεια της παλμογεννήτριας (encoder). Ο χειρισμός της κάρτας μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τον H/Y και ειδικό λογισμικό.

Συγκεκριμένα, η λειτουργία της κάρτας επιτυγχάνεται με ένα αρκετά μεγάλο εύρος ASCII εντολών, οι οποίες εκτελούνται από την κάρτα την στιγμή που στέλνονται σ' αυτήν. Ο χειρισμός αυτών των εντολών στον ηλεκτρονικό υπολογιστή και η αποστολή τους στην κάρτα γίνεται με προγράμματα γραμμένα στη γλώσσα προγραμματισμού C/C++. Στα προγράμματα χρησιμοποιούνται οι βιβλιοθήκες επικοινωνίας με την κάρτα που αντιστοιχούν στο λειτουργικό σύστημα εκτέλεσής τους. Στην προκειμένη περίπτωση χρησιμοποιείται το λειτουργικό σύστημα QNX προκειμένου να χρησιμοποιηθεί η επιπλέον δυνατότητα που παρέχει, της εκτέλεσης του βρόχου ελέγχου σε πραγματικό χρόνο.

6.1.3 Ο έλεγχος σε πραγματικό χρόνο

Ο έλεγχος, σύμφωνα με την διαδικασία που περιγράφηκε στην Παρ. 6.1.2, απαιτεί την συνεχή ρύθμιση της τιμής της τάσης του ρεύματος που στέλνει η κάρτα στον ενισχυτή, έτσι ώστε η μάζα να εκτελέσει την επιθυμητή κίνηση. Επομένως, ένα πρόγραμμα ελέγχου αποτελείται, κατά κύριο λόγο, από μία επαναλαμβανόμενη εργασία (loop), κατά την οποία διαβάζονται τα τρέχοντα δεδομένα (π.χ. θέση, ταχύτητα μάζας) και υπολογίζεται η νέα τιμή τάσης ρεύματος (control-law computation) προκειμένου να τροποποιηθούν αυτά τα δεδομένα. Μάλιστα, η ανανέωση αυτής της τιμής πρέπει να γίνεται σε πάρα πολύ μικρά χρονικά διαστήματα, που σημαίνει ότι η επαναλαμβανόμενη εργασία πρέπει να έχει πολύ μικρή περίοδο. Διαφορετικά, η διόρθωση της κίνησης θα γίνεται καθυστερημένα οδηγώντας σε σημαντικά σφάλματα στην κίνηση της μάζας, οπότε το σύστημα δεν θα είναι υπό έλεγχο.

Συνήθως η εκτέλεση ενός προγράμματος ελέγχου σε C/C++ γίνεται σωστά και καλά και η περίοδος της επαναλαμβανόμενης εργασίας είναι πολύ μικρή για μία συνηθισμένη υπολογιστική ισχύ. Ωστόσο, τέτοιου είδους συστήματα δεν πρέπει απλώς να δουλεύουν σωστά, αλλά πρέπει να δείχνουν ότι πράγματι το κάνουν. Για να συμβαίνει αυτό είναι αναγκαίο η περίοδος να είναι καθορισμένη και επαρκής για την παρακολούθηση της απόκρισης του συστήματος. Γι' αυτόν τον λόγο η εκτέλεση του προγράμματος ελέγχου απαιτείται να γίνεται σε πραγματικό χρόνο. Ένα πρόγραμμα που εκτελείται σε πραγματικό χρόνο παρατίθεται στο Παράρτημα Γ.

Ειδικότερα, τα συστήματα της συγκεκριμένης κατηγορίας είναι λίγο ως πολύ πλήρως καθορισμένα με αποτέλεσμα ο υπολογισμός μιας ικανοποιητικής περιόδου να είναι εφικτός. Ένας καλός κανόνας υπολογισμού της περιόδου υπολογισμού του νόμου ελέγχου είναι να λαμβάνεται ίσος με το $1/10$ έως το $1/20$ του χρόνου ανύψωσης. Ο κανόνας αυτός μπορεί να δοθεί σε σχέση με το εύρος ζώνης (bandwidth) του συστήματος, αφού το εύρος ζώνης είναι προσεγγιστικά ίσο με το $1/2$ του χρόνου ανύψωσης. Άρα η συχνότητα δειγματοληψίας απαιτείται να είναι 20 με 40 φορές μεγαλύτερη από το εύρος ζώνης του συστήματος.

Το θεωρητικό μικρότερο όριο της συχνότητας δειγματοληψίας δίνεται από το θεώρημα δειγματοληψίας του Nyquist. Το θεώρημα λέει ότι «κάθε χρονικά συνεχές σήμα με εύρος ζώνης ω μπορεί να αναπαραχθεί ακριβώς από τις δειγματοληπτικές τιμές αν και μόνον αν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 2ω ή μεγαλύτερη». Φαίνεται ότι η συνιστώμενη συχνότητα δειγματοληψίας για απλούς κατευθυντές είναι σημαντικά υψηλότερη απ' αυτό το χαμηλό όριο. Η υψηλή συχνότητα δειγματοληψίας βοηθά να διατηρηθεί χαμηλή η είσοδος ελέγχου και απλός ο υπολογισμός του νόμου ελέγχου.

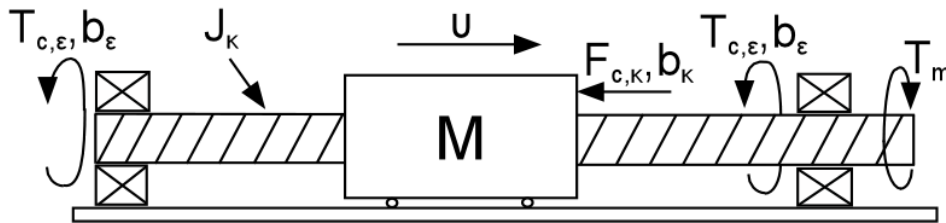
6.2 Μοντελοποίηση πειραματικής διάταξης

Γενικά, πρόκειται για ένα μη γραμμικό σύστημα, επειδή η τριβή, είναι, στην απλούστερη μορφή της, μια μη γραμμική συνάρτηση της ταχύτητας. Αρχικά, χάριν απλότητας θεωρείται ότι η τριβή του συστήματος, όπου κι αν εμφανίζεται, περιγράφεται από το κλασσικό μοντέλο τριβής (Coulomb+ιξώδη τριβή). Η μη γραμμικότητα του μοντέλου τριβής οφείλεται στο πρόσημο της τριβής Coulomb, το οποίο πρέπει να είναι πάντοτε αντίθετο από το πρόσημο της ταχύτητας.

6.2.1 Η δύναμη τριβής ως διαταραχή

Αν υποθεθεί ότι η μάζα κινείται μόνο ως προς μια κατεύθυνση, τότε η τριβή Coulomb έχει πάντα το ίδιο πρόσημο ανεξάρτητα από την ταχύτητα, οπότε αποτελεί μία σταθερή δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση της μάζας. Γι' αυτόν τον λόγο σ' αυτήν την περίπτωση μπορεί να θεωρηθεί σαν μία εξωτερική διαταραχή στο σύστημα. Το υπόλοιπο τμήμα της δύναμης τριβής είναι η ιξώδης τριβή η οποία είναι ανάλογη της ταχύτητας.

Ειδικότερα, για την πειραματική διάταξη του Σχ. 6-1 αναπτύσσονται δύο διαφορετικές δυνάμεις τριβής. Η μία εφαρμόζεται στην κινούμενη μάζα από τον κοχλία, ενώ η άλλη αναπτύσσεται στις δύο εδράσεις του κοχλία, σύμφωνα με το σχήμα:



Σχήμα 6-8. Οι δυνάμεις τριβής στο σύστημα δρομέα-κοχλία.

όπου:

J_K η ροπή αδράνειας του κοχλία ως προς τον άξονά του,

$T_{c,ε}$ η ροπή, ως προς τον άξονα του κοχλία, της τριβής Coulomb στα έδρανα,

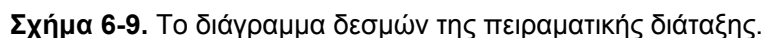
$b_ε$ ο συντελεστής ιξώδους τριβής στα έδρανα,

$F_{c,K}$ η τριβή Coulomb στην επιφάνεια του κοχλία, λόγω κίνησης της μάζας,

b_K ο συντελεστής ιξώδους τριβής στην επιφάνεια του κοχλία, λόγω κίνησης της μάζας.

Σύμφωνα με τις προηγούμενες παραδοχές για την δύναμη τριβής, στο σύστημα ανοικτού βρόχου του Σχ. 6-7 υπάρχουν τρεις διαταραχές, που είναι οι: $T_{c,ε}$, $F_{c,K}$ και V_K .

Έτσι το διάγραμμα δεσμών του συστήματος είναι το εξής:



Οι πρωτογενείς μεταβλητές του συστήματος είναι οι:

Οι δευτερογενείς μεταβλητές του συστήματος είναι οι:

Οι μεταβλητές κατάστασης του συστήματος είναι οι:

Οι εξισώσεις στοιχείων και κόμβων δίνονται στον Πίν. 6-1.

α.α.	Εξισώσεις Στοιχείων	α.α.	Εξισώσεις Κόμβων
1	$i_a = \frac{1}{r_1} V_\kappa$	8	$\omega_J = \omega_b = \omega_m = \omega$
2	$T_m = r_2 i_a$	9	$T_m = T_b + T + T_J + T_{c,\varepsilon}$
3	$T_b = b_\varepsilon \omega_b$	10	$\nu_M = \nu_b = \nu$
4	$\frac{d\omega_J}{dt} = \frac{1}{J_\kappa} T_J$	11	$F = F_M + F_b + F_{c,\kappa}$

$$\begin{array}{ll}
5 & v = m\omega \\
6 & F_M = M \frac{dv_M}{dt} \\
7 & F_b = b_\kappa v_b
\end{array}$$

Η εξίσωση κατάστασης του συστήματος είναι η εξής:

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_J}{dt} &= \frac{1}{J_\kappa} T_J \xrightarrow{9} \frac{d\omega_J}{dt} = \frac{1}{J_\kappa} (T_m - T_{c,\varepsilon} - T_b - T) \xrightarrow{2,1,3,8} \\
\frac{d\omega_J}{dt} &= \frac{1}{J_\kappa} \left(r_2 \frac{1}{r_1} V_\kappa + T_{c,\varepsilon} - b_\varepsilon \omega_J - T \right) \xrightarrow{11,6,7,10,5,8} \\
\frac{d\omega_J}{dt} &= \frac{1}{J_\kappa} \left[r_2 \frac{1}{r_1} V_\kappa - T_{c,\varepsilon} - b_\varepsilon \omega_J - m \left(mM \frac{d\omega_J}{dt} + mb_\kappa \omega_J + F_{c,\kappa} \right) \right]
\end{aligned}$$

η οποία σε μητρωϊκή μορφή γράφεται:

$$\frac{d}{dt} [\omega_J] = \left[\frac{-b_\varepsilon - m^2 b_\kappa}{J_\kappa + m^2 M} \right] \cdot [\omega_J] + \frac{1}{J_\kappa + m^2 M} \begin{bmatrix} r_2 & -1 & -m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_\kappa \\ T_{c,\varepsilon} \\ F_{c,\kappa} \end{bmatrix} \quad (6-3)$$

$$\text{Αν τεθεί:} \quad J_{o\lambda} = J_\kappa + m^2 M, \quad b_{o\lambda} = b_\varepsilon + m^2 b_\kappa, \quad T_{c,o\lambda} = T_{c,\varepsilon} + mF_{c,\kappa} \quad (6-4)$$

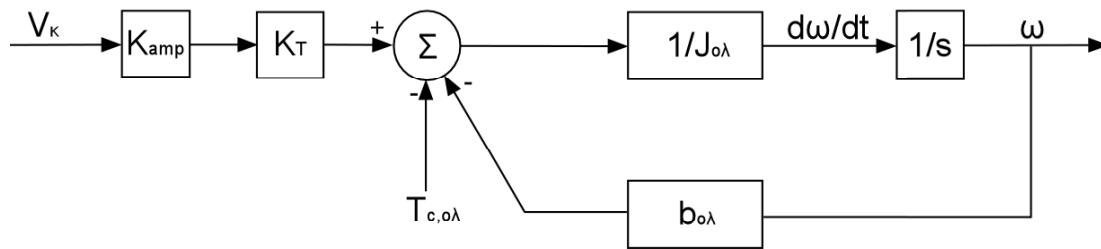
τότε η Εξ. (6-3) γράφεται:

$$\frac{d}{dt} [\omega_J] = \left[\frac{b_{o\lambda}}{J_{o\lambda}} \right] \cdot [\omega_J] + \frac{1}{J_{o\lambda}} \cdot \begin{bmatrix} r_2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_\kappa \\ T_{c,o\lambda} \end{bmatrix} \quad (6-5)$$

$$\text{ή γενικότερα:} \quad \frac{d}{dt} [\omega] = A \cdot [\omega] + B \cdot \begin{bmatrix} V_\kappa \\ T_{c,o\lambda} \end{bmatrix} \quad (6-6)$$

$$\text{όπου:} \quad A = \left[\frac{b_{o\lambda}}{J_{o\lambda}} \right], \quad B = \frac{1}{J_{o\lambda}} \cdot \begin{bmatrix} r_2 & -1 \end{bmatrix} \quad (6-7)$$

Με την βοήθεια της εξίσωσης (6-6) μπορεί να σχεδιαστεί το δομικό διάγραμμα του συστήματος, το οποίο δίνεται στο Σχ. 6-10.



Σχήμα 6-10. Το δομικό διάγραμμα της πειραματικής διάταξης.

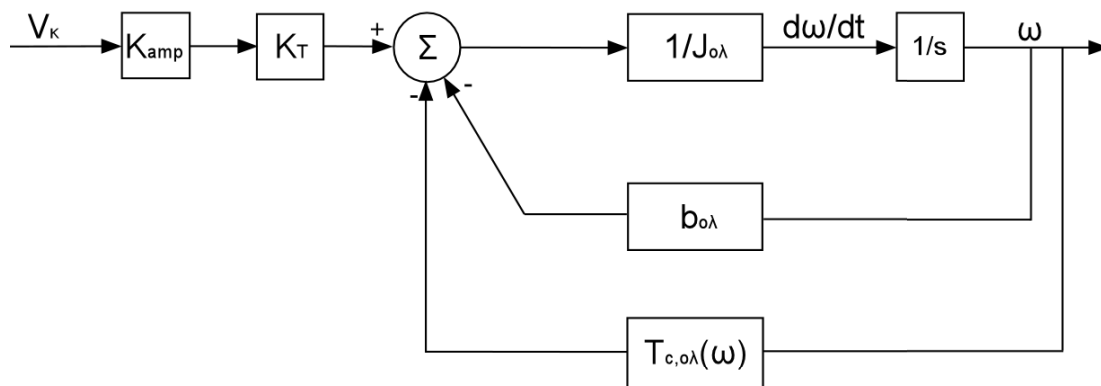
Επίσης, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η:

$$G(s) = (sI - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} G_1(s) & G_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_2/r_1}{s - \frac{1}{J_{ol}} b_{ol}} & \frac{-1}{s - \frac{1}{J_{ol}} b_{ol}} \end{bmatrix} \quad (6-8)$$

6.2.2 Η δύναμη τριβής ως συνάρτηση της ταχύτητας

Αν η κίνηση της μάζας δεν γίνεται μόνο προς μία κατεύθυνση, αλλά και προς τις δύο κατευθύνσεις, τότε η τριβή Coulomb είναι συνάρτηση του πρόσημου της ταχύτητας. Αυτό σημαίνει ότι, σ' αυτήν την περίπτωση, η τριβή Coulomb δεν αποτελεί μία εξωτερική διαταραχή στο σύστημα, διότι εξαρτάται άμεσα από την μεταβλητή κατάστασης του συστήματος.

Τότε, το δομικό διάγραμμα του Σχ. 6-10 πρέπει να μετασχηματιστεί στο ακόλουθο:



Σχήμα 6-11. Το δομικό διάγραμμα της πειραματικής διάταξης, όταν η τριβή είναι συνάρτηση της ταχύτητας.

Με βάσει το δομικό διάγραμμα του Σχ. 6-11 μπορεί να εξαχθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος για οποιαδήποτε μοντελοποίηση της τριβής σε συνάρτηση με την ταχύτητα, αρκεί να επιλεγεί κατάλληλα το “block” του δομικού διαγράμματος που αντιστοιχεί στην τριβή Coulomb.

6.2.3 Πειραματικός προσδιορισμός της τριβής

Τα χαρακτηριστικά της τριβής τα οποία μπορούν να μοντελοποιηθούν, εξαρτώνται άμεσα από την εφαρμογή, την επιθυμητή ακρίβεια στην απόκριση του συστήματος και την πειραματική διάταξη. Για παράδειγμα, αν ο “encoder” που χρησιμοποιείται για την καταγραφή της θέσης έχει διακριτική ικανότητα της τάξης των 50.000counts/rev, τότε η μικρότερη γωνιακή μετατόπιση που μπορεί να μετρηθεί είναι της τάξης των 0,00013rad ή ισοδύναμα των 0,0072deg. Σ’ αυτήν την περίπτωση θα μπορούσε να επιδιωχθεί η απόκριση θέσης του κινούμενου σώματος να είναι ανάλογης ακρίβειας.

Όμως, η ανάγκη υψηλής ακρίβειας στην απόκριση θέσης απαιτεί η αντιστάθμιση της δύναμης της τριβής να γίνει με αρκετά μεγάλη λεπτομέρεια. Με άλλα λόγια, στην περίπτωση αυτή απαιτείται η μοντελοποίηση ακόμα και ορισμένων χαρακτηριστικών της τριβής στην περιοχή της προ-ολίσθησης μετατόπισης, με την εκάστοτε επιθυμητή κίνηση του σώματος να καθορίζει ποια απ’ αυτά τα φαινόμενα είναι αναγκαίο να μοντελοποιηθούν.

Στην πειραματική διάταξη του Σχ. 6-7, που χρησιμοποιήθηκε για την εφαρμογή των σχεδίων αντιστάθμισης, ο “encoder” έχει διακριτική ικανότητα ίση με 500counts/rev, που σημαίνει ότι η μικρότερη γωνιακή μετατόπιση που μπορεί να μετρηθεί είναι 0,013rad ή ισοδύναμα 0,72deg, ενώ η μικρότερη γραμμική μετατόπιση που μπορεί να μετρηθεί είναι 0.042mm. Αυτό σημαίνει ότι οι μικρότερες κινήσεις που μπορούν να γίνουν αντιληπτές ανήκουν στην περιοχή των μακρό-μετατοπίσεων και όχι στην περιοχή της προ-ολίσθησης μετατόπισης. Με άλλα λόγια, η χρησιμοποίηση ενός μοντέλου τριβής που θα ενσωμάτωνε φαινόμενα της στατικής περιοχής δεν θα μπορούσε να οδηγήσει σε κανένα συμπέρασμα ως προς την αποτελεσματικότητά του.

Για τους λόγους αυτούς η μοντελοποίηση της τριβής για την εφαρμογή των σχεδίων αντιστάθμισης θα βασιστεί σε κινητικά μοντέλα που ενσωματώνουν κυρίως τα μόνιμα χαρακτηριστικά της τριβής.

Όμως, ανεξάρτητα απ’ το μοντέλο τριβής που χρησιμοποιείται για την αντιστάθμιση τριβής, η επιτυχία της εξαρτάται άμεσα από την ακρίβεια με την οποία προσδιορίστηκαν οι παράμετροι του μοντέλου κατά μήκος της διαδρομής κίνησης. Γι’ αυτόν τον λόγο ο πειραματικός προσδιορισμός των παραμέτρων της τριβής είναι πολύ μεγάλης σημασίας. Ειδικότερα, δεδομένου ότι το πιο γενικό μοντέλο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι το γενικό κινητικό μοντέλο, βλ. Παρ. 3.1.2, και ότι οι παράμετροι οποιουδήποτε απλούστερου κινητικού μοντέλου μπορούν να προκύψουν από τις παραμέτρους του, προσδιορίστηκαν πειραματικά μόνο οι παράμετροι του γενικού κινητικού μοντέλου.

Συγκεκριμένα, οι παράμετροι του γενικού κινητικού μοντέλου τριβής είναι οι εξής:

$$T_s, T_c, \omega_{str}, b \quad (6-9)$$

όπου:

T_s η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής ή η ροπή αποδέσμευσης,

T_c η ροπή της τριβής Coulomb,

ω_{str} η ταχύτητα Stribeck,

b ο συντελεστής ιξώδους τριβής.

Ακίνητοποιώντας την μάζα του συστήματος σε μια οποιαδήποτε θέση της συνολικής διαδρομής της και εφαρμόζοντας στους ακροδέκτες του ενισχυτή μια συνεχώς αυξανόμενη τάση, ξεκινώντας απ' την μηδενική, μπορεί να καταγραφεί η τιμή της τάσης κατά την εκκίνηση. Ειδικότερα, ως εκκίνηση ορίζεται η κίνηση κατά μία πολύ μικρή απόσταση, π.χ. 3 "encoder counts", έτσι ώστε να συμπεριληφθεί και μία ενδεχόμενη χάρη κατανομών οδόντων (backlash) που μπορεί να εμφανίσει η συγκεκριμένη πειραματική διάταξη. Η τιμή της τάσης του ρεύματος κατά την εκκίνηση της μάζας καθορίζει το επίπεδο της ροπής αποδέσμευσης, T_s .

Αμέσως μετά την εκκίνηση της μάζας η δύναμη τριβής ελαττώνεται σε ένα κατώτερο επίπεδο, που είναι η τριβή ολίσθησης ή η τριβή Coulomb, T_c . Το επίπεδο αυτό μπορεί να εκτιμηθεί αφαιρώντας από την ροπή που ασκεί ο κινητήρας την αδρανειακή ροπή που ασκείται στην μάζα, λόγω της επιταχυνόμενης κίνησης που εκτελεί. Η ροπή αδράνειας της κινούμενης μάζας και των περιστρεφόμενων τμημάτων ως προς τον άξονα του κοχλία-οδηγού, η οποία χρειάζεται για τον υπολογισμό της αδρανειακής ροπής, έχει προσδιοριστεί πειραματικά στο [3], και βρέθηκε ίση με:

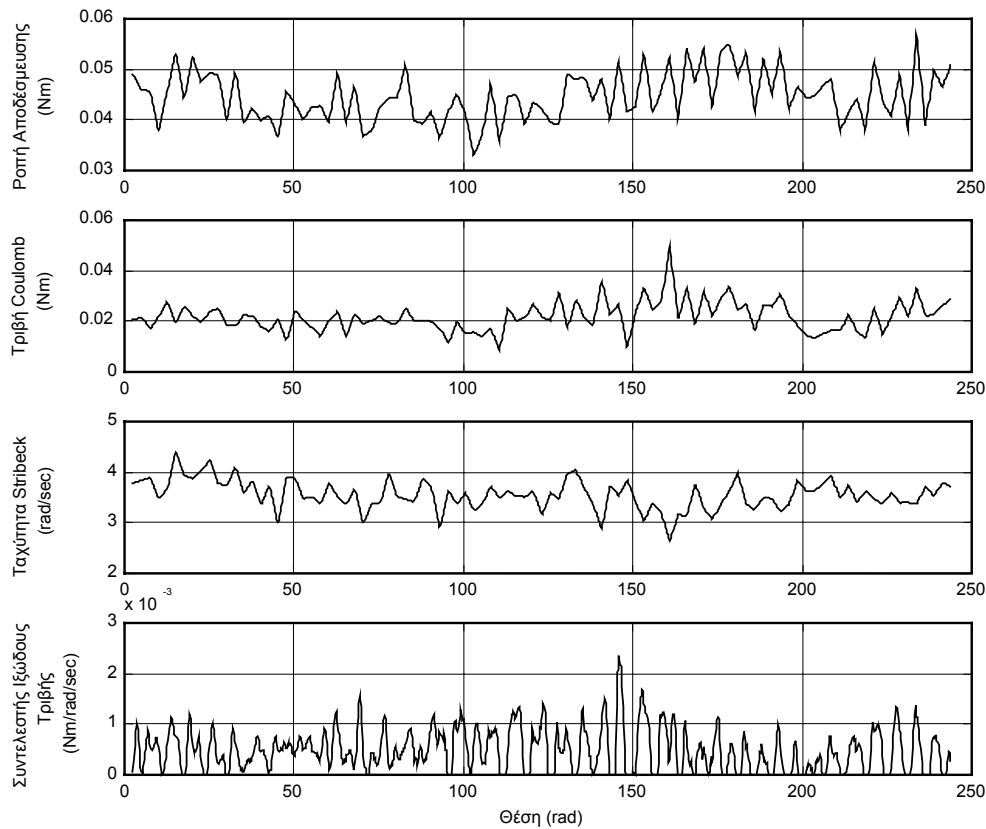
$$J_{\alpha\lambda} = 0.0003 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \quad (6-10)$$

Επιπλέον, το επίπεδο της ταχύτητας την στιγμή μέτρησης της τριβής Coulomb, αποτελεί μία εκτίμηση της ταχύτητας Stribeck, ω_{str} .

Όσον αφορά τον συντελεστή της ιξώδους τριβής, b , η τιμή του μπορεί να εκτιμηθεί υπολογίζοντας την ροπή που ασκεί ο κινητήρας κατά την κίνηση της μάζας με σταθερή ταχύτητα. Αφαιρώντας απ' αυτήν την ροπή το επίπεδο της τριβής ολίσθησης, δηλαδή την τριβή Coulomb, και διαιρώντας με την τιμή της ταχύτητας, προκύπτει η τιμή του συντελεστή ιξώδους τριβής. Δηλαδή, κατά την κίνηση με σταθερή ταχύτητα ισχύει:

$$b = \frac{T_m - T_c}{\omega} \quad (6-11)$$

Πραγματοποιώντας τα προηγούμενα πειράματα σε πολλές θέσεις κατά μήκος του κοχλία-οδηγού, προέκυψαν τα ακόλουθα διαγράμματα των χαρακτηριστικών μεγεθών της τριβής.



Σχήμα 6-12. Πειραματικές τιμές των χαρακτηριστικών μεγεθών της τριβής σε συνάρτηση με την θέση της μάζας στον κοχλία-οδηγό.

Οι μέσες τιμές των χαρακτηριστικών μεγεθών της τριβής όπως προκύπτουν από τα πειραματικά αποτελέσματα του Σχ. 6-12 είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_s &= 0.0446 Nm \\
 \bar{T}_c &= \bar{T}_{c,ολ} = 0.0218 Nm \\
 \bar{b} &= \bar{b}_{ολ} = 4.86 \cdot 10^{-4} Nm / rad / sec \\
 \bar{\omega}_{str} &= 3.554 rad / sec
 \end{aligned}
 \tag{6-12}$$

Με την βοήθεια των πειραματικών τιμών του Σχ. 6-12 είναι δυνατή η αντιστάθμιση της τριβής χρησιμοποιώντας το γενικό κινητικό μοντέλο τριβής, ή οποιοδήποτε άλλο κινητικό μοντέλο τριβής. Οι παράμετροι αυτού του μοντέλου δεν θα είναι σταθερές τιμές,

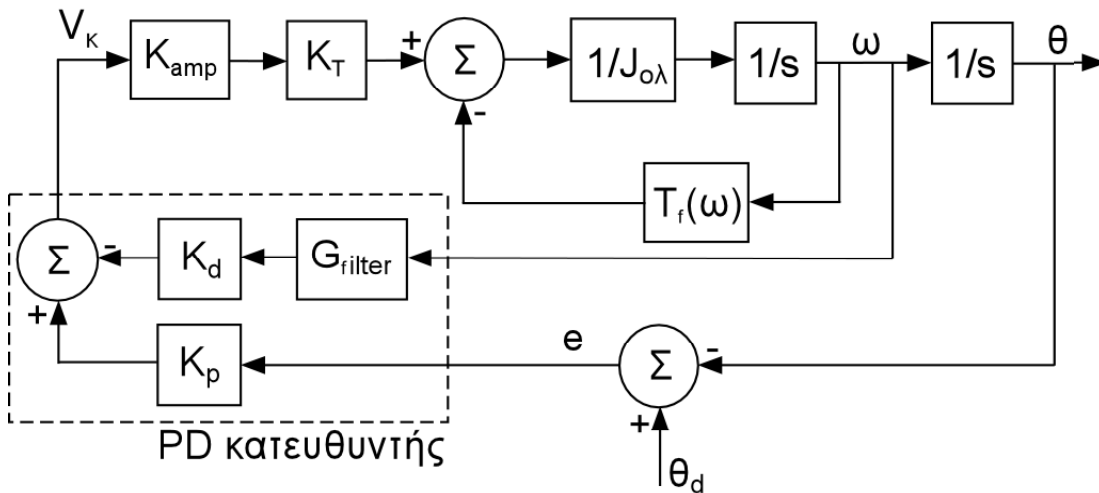
αλλά θα μεταβάλλονται ανάλογα με την τρέχουσα θέση της κινούμενης μάζας, σύμφωνα με τις πειραματικές μετρήσεις.

6.3 Αντιστάθμιση τριβής

6.3.1 Επιλογή του μοντέλου τριβής

Η αναγκαιότητα επίτευξης υψηλής ακρίβειας στην απόκριση θέσης της κινούμενης μάζας καθιστά επιτακτική την επιλογή του καταλληλότερου μοντέλου τριβής. Ένας απλός τρόπος επιλογής μεταξύ των διαφόρων μοντέλων είναι η σύγκριση της απόκρισης θέσης του συστήματος σε διάφορες εισόδους με την απόκριση, στην ίδια είσοδο, του μοντέλου του συστήματος στο Matlab/Simulink, όταν το “block” της τριβής αντικατασταθεί με το προς εξέταση μοντέλο τριβής. Το μοντέλο τριβής που οδηγεί σε καλύτερη προσέγγιση της πραγματικής απόκρισης, θα είναι το καταλληλότερο για την αντιστάθμιση της τριβής του συστήματος.

Αν υποτεθεί ότι στο σύστημα δίνεται μία είσοδος θέσης, ενώ συγχρόνως χρησιμοποιείται ένας PD κατευθυντής, τότε το μοντέλο του συστήματος δίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 6-13. Δομικό διάγραμμα πειραματικής διάταξης με PD κατευθυντή.

όπου:

$$G_{filter} = \frac{1}{0.25s + 1}$$

είναι η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου με το οποίο η κάρτα ελέγχου υπολογίζει την ταχύτητα της μάζας.

Έστω ότι στο πραγματικό σύστημα δίνεται μία βηματική είσοδος:

$$\theta_d = 4000 \text{ counts} = 50.25 \text{ rad} \quad (6-13)$$

με τα κέρδη του PD κατευθυντή να είναι:

$$\begin{aligned} K_p &= 0.001 \text{ Volt} / \text{count} = 0.0796 \text{ Volt} / \text{rad} \\ K_d &= 0.002 \text{ Volt} / \text{count} / \text{sec} = 0.1592 \text{ Volt} / \text{rad} / \text{sec} \end{aligned} \quad (6-14)$$

Τότε, η απόκριση θέσης του συστήματος σε αντιπαράθεση με τις αντίστοιχες αποκρίσεις του μοντέλου του στο Matlab/Simulink, βλ. Σχ. 6-13, όταν στην θέση του “block” της τριβής χρησιμοποιούνται τα ακόλουθα μοντέλα τριβής:

1. Κλασσικό μοντέλο τριβής (Coulomb+ιξώδης τριβή),

$$T_f(\omega) = \begin{cases} \bar{T}_c \operatorname{sgn}(\omega) + \bar{b}\omega, & \alpha\nu \quad \omega \neq 0 \\ 0, & \alpha\nu \quad \omega = 0 \end{cases} \quad (6-15)$$

2. Κλασσικό μοντέλο τριβής (Ροπή αποδέσμευσης+ιξώδης τριβή),

$$T_f(\omega) = \begin{cases} \bar{T}_s \operatorname{sgn}(\omega) + \bar{b}\omega, & \alpha\nu \quad \omega \neq 0 \\ 0, & \alpha\nu \quad \omega = 0 \end{cases} \quad (6-16)$$

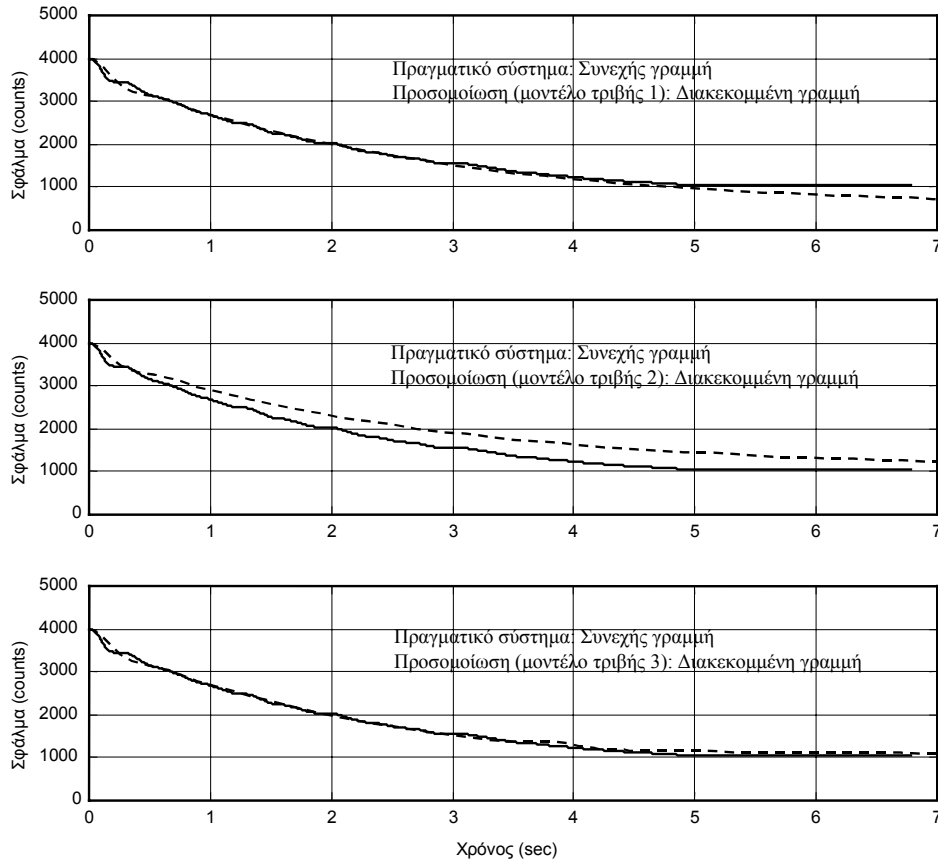
3. Γενικό κινητικό μοντέλο τριβής,

$$T_f(\omega) = \begin{cases} \left[\bar{T}_c + (\bar{T}_s - \bar{T}_c) \exp(-|\omega/\omega_{str}|^2) \right] \operatorname{sgn}(\omega) + \bar{b}\omega, & \alpha\nu \quad \omega \neq 0 \\ 0, & \alpha\nu \quad \omega = 0 \end{cases} \quad (6-17)$$

δίνονται στο Σχ. 6-14.

Εξετάζοντας την επίδραση που έχει κάθε ένα από τα τρία μοντέλα τριβής στην απόκριση του συστήματος, προκύπτει ότι το γενικό κινητικό μοντέλο τριβής (μοντέλο τριβής 3) προσεγγίζει καλύτερα την τριβή που αναπτύσσεται στο πραγματικό σύστημα. Ειδικότερα, συνδυάζοντας την τριβή ολίσθησης με την ροπή αποδέσμευσης επιτυγχάνει τον συνδυασμό των πλεονεκτημάτων του μοντέλου Coulomb+ιξώδης τριβή (μοντέλο τριβής 1) και του μοντέλου ροπή αποδέσμευσης+ιξώδης τριβή (μοντέλο τριβής 2), αντίστοιχα. Τα πλεονεκτήματα των δύο τελευταίων μοντέλων είναι η καλύτερη περιγραφή της απόκρισης κατά την ολίσθηση και η ακρίβεια στο σφάλμα μόνιμης κατάστασης, αντίστοιχα.

Ο συνδυασμός της τριβής ολίσθησης με την ροπή αποδέσμευσης συνιστά το φαινόμενο Stribeck, το δυναμικό, δηλαδή, φαινόμενο που περιγράφει την ελάττωση της ροπής της τριβής κατά την εκκίνηση (“stick-slip” κίνηση). Γι’ αυτόν τον λόγο το γενικό κινητικό μοντέλο τριβής θα ήταν καταλληλότερο από τα υπόλοιπα δύο για να αντισταθμίσει την τριβή.



Σχήμα 6-14. Σύγκριση της απόκρισης θέσης του πραγματικού συστήματος με τις αποκρίσεις θέσης του μοντέλου του συστήματος για τρία διαφορετικά μοντέλα τριβής.

Επιπλέον, είναι αναγκαίο να εξεταστεί η συμπεριφορά των τριών κινητικών μοντέλων τριβής, όταν η κινούμενη μάζα εκτελεί συνεχώς μία δυναμική κίνηση, δηλαδή μία κίνηση με συνεχείς και πολύ απότομες μεταβολές της ταχύτητας. Τότε, σύμφωνα με την Παρ. 2.3, η κίνηση θα χαρακτηρίζεται και από ορισμένα νέα δυναμικά φαινόμενα, εκτός από το φαινόμενο Stribeck, των οποίων η επίδραση στην απόκριση του συστήματος θα πρέπει να εξεταστεί.

Η κίνηση της μάζας κατά την διάρκεια ενός L.C. συνιστά μία κίνηση με συνεχείς και πολύ απότομες μεταβολές της ταχύτητας. Προσθέτοντας στην ροπή του κατευθυντή μία ροπή αντιστάθμισης βασισμένη, για παράδειγμα, στο μοντέλο:

$$T_f(\omega) = \begin{cases} T'_s \cdot \text{sgn}(\omega) + b' \cdot \omega, & \alpha \nu |\omega| > \Delta V \\ 0, & \alpha \nu |\omega| \leq \Delta V \end{cases} \quad (6-18)$$

$$T'_s = 1.5 \cdot \bar{T}_s$$

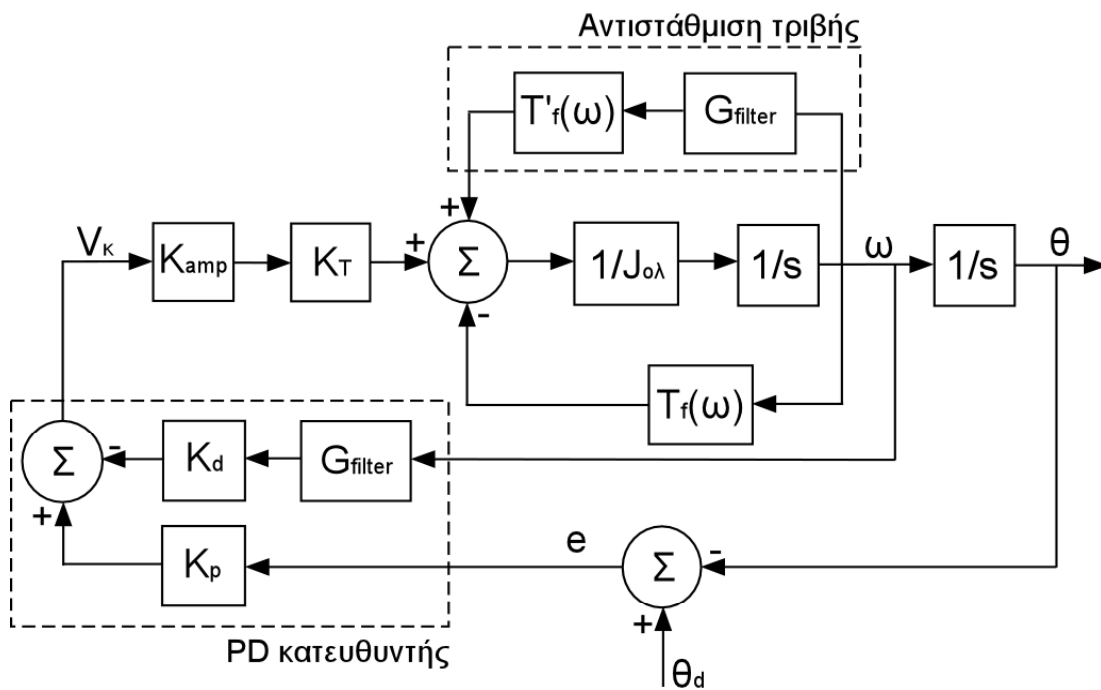
$$b' = \bar{b}$$

$$\Delta V = 0.25 \text{ rad/sec}$$

όπου:

ΔV είναι το όριο της ταχύτητας κάτω από το οποίο η ταχύτητα θεωρείται μηδενική, διότι στην πράξη μηδενική ταχύτητα δεν μπορεί να υπάρξει, παρά μόνο μία πολύ μικρή ταχύτητα κοντά στην μηδενική,

αναμένεται να εμφανιστεί L.C. στην απόκριση του συστήματος. Συγκεκριμένα, σ' αυτήν την περίπτωση το δομικό διάγραμμα του συστήματος δίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



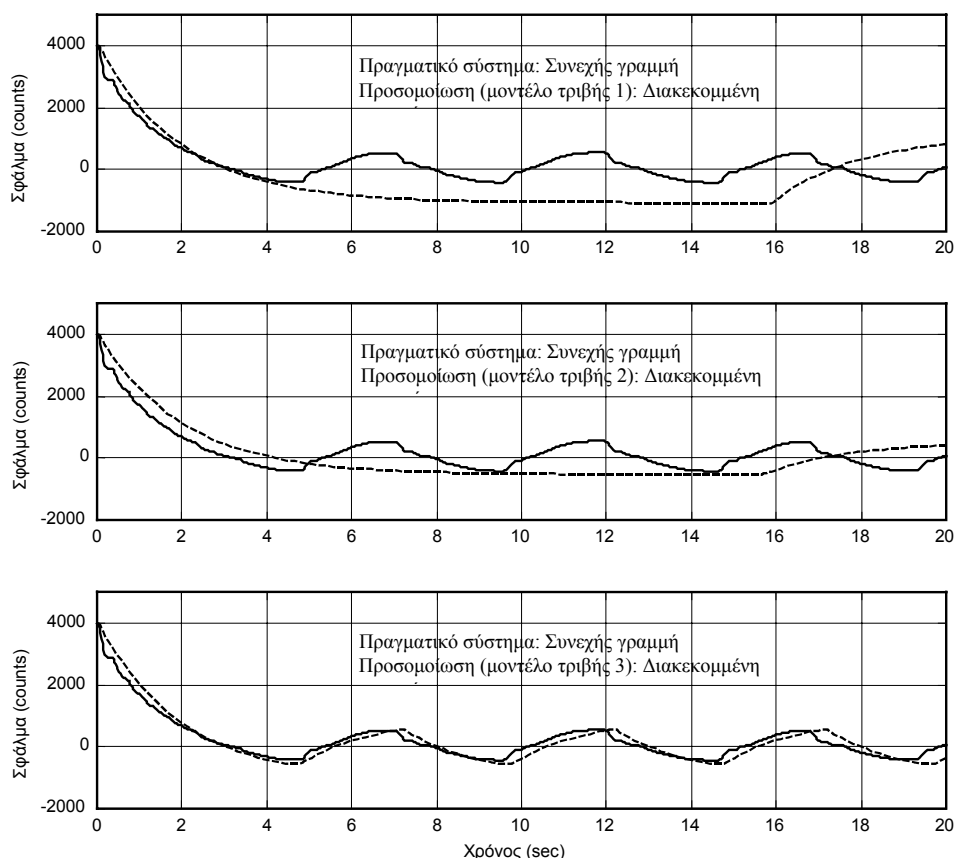
Σχήμα 6-15. Δομικό διάγραμμα πειραματικής διάταξης με PD κατευθυντή και αντιστάθμιση τριβής.

Αν τα κέρδη του PD κατευθυντή καθώς και η βηματική είσοδος παραμείνουν ίδια με την προηγούμενη περίπτωση, βλ. Εξ. (6-13), (6-14), τότε η απόκριση του συστήματος μαζί με τις αποκρίσεις του μοντέλου του στο Matlab/Simulink, Σχ. 6-15, για τα τρία κινητικά μοντέλα τριβής, βλ. Εξ. (6-15), (6-16), (6-17), φαίνονται στο Σχ. 6-16.

Δεδομένου ότι το γενικό κινητικό μοντέλο τριβής (μοντέλο τριβής 3) επαρκεί για την προσομοίωση της συμπεριφοράς της τριβής σε μία συνεχή δυναμική κίνηση, όπως για παράδειγμα είναι το L.C., σημαίνει ότι η το δυναμικό φαινόμενο που σε πολύ μεγάλο ποσοστό καθορίζει την συμπεριφορά του συστήματος σ' αυτήν την κίνηση είναι το

φαινόμενο Stribeck. Τα υπόλοιπα δυναμικά φαινόμενα τα οποία περιγράφηκαν στην Παρ. 2.3 δεν φαίνεται να επιδρούν σημαντικά στην απόκριση του συστήματος.

Συμπερασματικά, και στην περίπτωση της κίνησης L.C. το γενικό κινητικό μοντέλο τριβής (μοντέλο τριβής 3) αποτελεί καταλληλότερη επιλογή σε σύγκριση με τα υπόλοιπα δύο μοντέλα τριβής (μοντέλα τριβής 1 και 2).



Σχήμα 6-16. Σύγκριση της απόκρισης θέσης του πραγματικού συστήματος με τις αποκρίσεις θέσης του μοντέλου του συστήματος για τρία διαφορετικά μοντέλα τριβής, όταν εμφανίζεται L.C.

6.3.2 Υπερεκτίμηση της τριβής και εντοπισμός L.C.

Σύμφωνα με το Κεφ. 5, η αντιστάθμιση τριβής μπορεί να οδηγήσει σε εντοπισμό L.C. εάν οι παράμετροι του μοντέλου τριβής έχουν υπερεκτιμηθεί. Σ' αυτήν την περίπτωση, είναι ενδιαφέρον να ελεγχθούν στην πράξη (με την βοήθεια της πειραματικής διάταξης που περιγράφηκε στην Παρ. 6.1) οι συνθήκες εντοπισμού L.C. καθώς και η περιοχή ισχύος της D.F.A. (ο θεωρητικός έλεγχος αναπτύχθηκε στο Κεφ. 5).

Ειδικότερα, ως μοντέλο τριβής αντιστάθμισης χρησιμοποιείται το **κλασσικό μοντέλο τριβής** (τριβή Coulomb+ιξώδης τριβή). Δεδομένου των παρατηρήσεων της Παρ. 6.3.1, το κινητικό μοντέλο τριβής που ενσωματώνει σε μεγαλύτερο βαθμό την συμπεριφορά της τριβής στην συγκεκριμένη πειραματική διάταξη είναι το **γενικό κινητικό μοντέλο τριβής**. Επομένως, η τιμή του πλάτους και της συχνότητας ενός ενδεχόμενου L.C. που δημιουργείται λόγω υπερεκτίμησης των παραμέτρων της τριβής, σύμφωνα με την Παρ. 5.2.5.1, θα δίνονται από την εξίσωση:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{G_L(j\omega)\} = -\frac{1}{N_{total}(X)} = \begin{cases} -\frac{\pi X}{4\left[\Delta T_c + (T_s - T_c)\exp\left(-\frac{X^2}{2\dot{\theta}_{str}^2}\right)\right]}, & X \leq \sqrt{3.5}\dot{\theta}_{str} \\ -\frac{\pi X}{4\Delta T_c}, & X > \sqrt{3.5}\dot{\theta}_{str} \end{cases} \\ \operatorname{Im}\{G_L(j\omega)\} = 0 \end{cases} \quad (6-19)$$

6.3.2.1 PD κατευθυντής

Αν χρησιμοποιείται PD κατευθυντής, τότε η συνάρτηση μεταφοράς του γραμμικού τμήματος του συστήματος, σύμφωνα με την M.E.D.F., υπολογίζεται από το δομικό διάγραμμα του Σχ. 6-15. Ειδικότερα, αν θεωρηθεί αμελητέα η επίδραση του φίλτρου G_{filter} , προκύπτει ότι:

$$G_L(s) = \frac{s}{J_{o\lambda}s^2 + (\Delta b + K_T K_{amp} K_d)s + K_T K_{amp} K_p} \quad (6-20)$$

ή ισοδύναμα, ότι:

$$G_L(j\omega) = \frac{j\omega}{(K_T K_{amp} K_p - J_{o\lambda}\omega^2) + (\Delta b + K_T K_{amp} K_d)j\omega} \quad (6-21)$$

Από τις Εξ. (6-19), (6-21) προκύπτει ότι το πλάτος και η συχνότητα του L.C., αν υποτεθεί ότι $X > \sqrt{3.5}\dot{\theta}_{str}$, δίνονται από την εξίσωση:

$$\begin{cases} X_{L.C.} = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\Delta T_c}{(\Delta b + K_{amp} K_T K_d)} \\ \omega_{L.C.} = \sqrt{\frac{K_{amp} K_T K_p}{J_{o\lambda}}} \end{cases} \quad (6-22)$$

Σε περίπτωση που από την Εξ. (6-22) βρεθεί ότι $X_{L.C.} \leq \sqrt{3.5}\dot{\theta}_{str}$ η υπόθεση από τη οποία προέκυψε η Εξ. (6-22) δεν ισχύει, οπότε θα πρέπει να τροποποιηθεί.

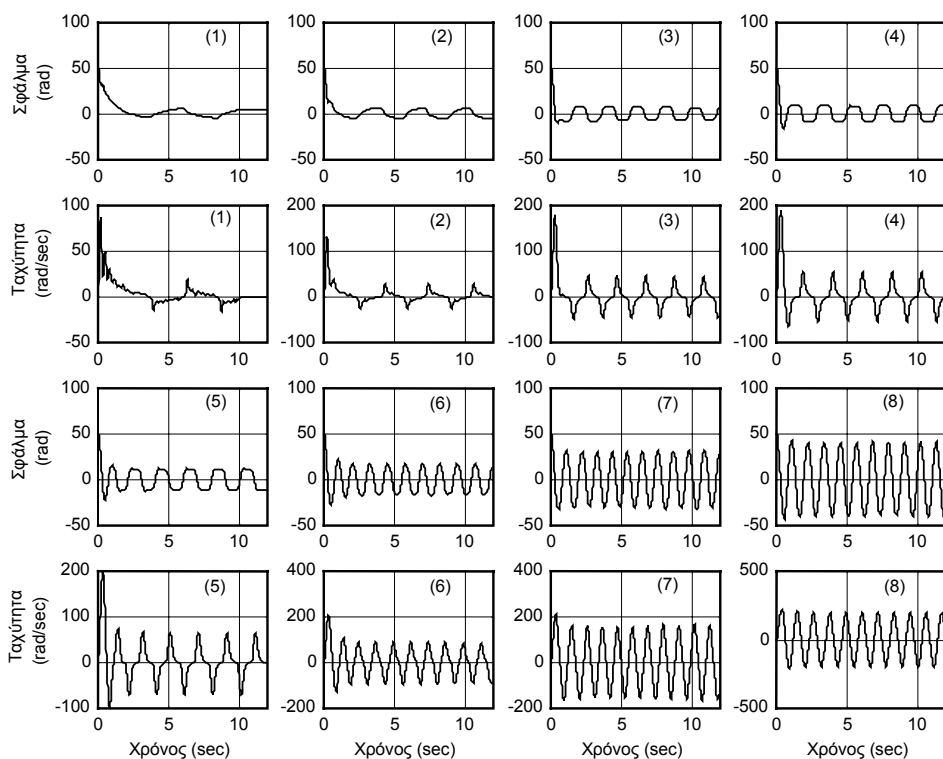
Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον πειραματικό προσδιορισμό των παραμέτρων της τριβής, βλ. Παρ. 6.2.3, έχει βρεθεί ότι $\bar{\omega}_{str} = 3.554 \text{ rad/sec}$, οπότε αν από την Εξ. (6-22) προκύψει ότι $X_{L.C.} \leq 6.649 \text{ rad/sec}$, τότε η Εξ. (6-22) θα πρέπει να τροποποιηθεί.

Στον Πίν. 6-2 παρατίθενται ορισμένες περιπτώσεις υπερεκτίμησης των παραμέτρων της τριβής που οδηγούν σε εντοπισμό L.C. Γι' αυτές τις περιπτώσεις έχει υπολογιστεί η θεωρητικά προβλεπόμενη τιμή του πλάτους και της συχνότητας του L.C. καθώς και η τιμή της διαφοράς ΔG , όπως ορίστηκε στην Παρ. 5.2.2.4. Ως πραγματικές τιμές της τριβής Coulomb και του συντελεστή ιξώδους τριβής λαμβάνονται οι πειραματικά προσδιορισθείσες μέσες τιμές τους κατά μήκος του οδηγού κοχλία.

Πίνακας 6-2. Περιπτώσεις υπερεκτίμησης των παραμέτρων της τριβής που οδηγούν σε εντοπισμό L.C. όταν χρησιμοποιείται PD κατευθυντής.

α.α.	K_p	K_d	ΔT_c	Δb	ΔG	$X_{L.C.}$	$\omega_{L.C.}$
	$\left(\frac{\text{Volt}}{\text{rad}}\right)$	$\left(\frac{\text{Volt} \cdot \text{sec}}{\text{rad}}\right)$	(Nm)	$\left(\frac{Nm \cdot \text{sec}}{\text{rad}}\right)$	(dB)	$\left(\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right)$	$\left(\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right)$
	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-3}$			
1	7.96	15.9	-5.41	0.000	0.671	10.3	3.34
2	7.96	11.9	-5.41	0.000	1.15	13.8	3.34
3	7.96	7.96	-5.41	0.000	2.31	20.6	3.34
4	7.96	3.98	-5.41	-0.243	7.31	48.2	3.34
5	7.96	3.98	-5.41	-0.486	8.85	58.1	3.34
6	7.96	3.98	-5.41	-0.729	10.9	73.1	3.34
7	7.96	3.98	-5.41	-0.968	11.9	97.9	3.34
8	7.96	3.98	-5.41	-1.098	13.6	121	3.34

Οι αποκρίσεις σφάλματος και ταχύτητας που προέκυψαν για κάθε μία από τις περιπτώσεις υπερεκτίμησης των παραμέτρων της τριβής, Πίν. 6-2, φαίνονται στο σχήμα:



Σχήμα 6-17. Αποκρίσεις σφάλματος και ταχύτητας σε διάφορες περιπτώσεις υπερεκτίμησης των παραμέτρων της τριβής όταν χρησιμοποιείται PD κατευθυντής.

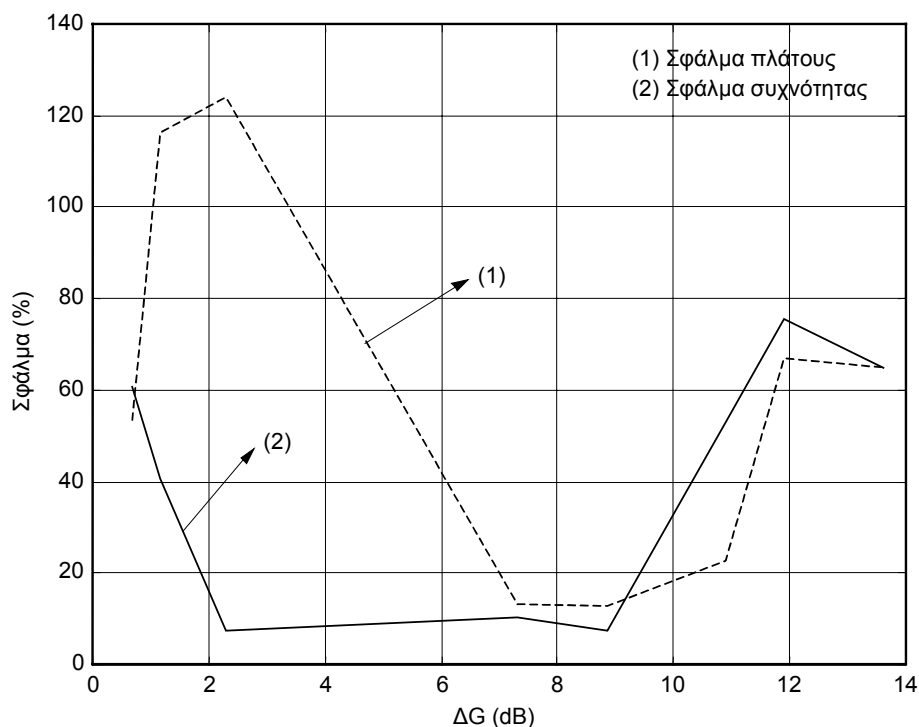
Οι τιμές του πλάτους και της συχνότητας των αποκρίσεων του Σχ. 6-18, καθώς και τα αντίστοιχα σφάλματα στον προσδιορισμό τους από την D.F.A., παρατίθενται στον πίνακα:

Πίνακας 6-3. Πειραματικές τιμές του πλάτους και της συχνότητας του L.C. για διάφορες περιπτώσεις υπερεκτίμησης των παραμέτρων της τριβής όταν χρησιμοποιείται PD κατευθυντής.

α.α.	$X_{L.C.,e}$ (rad/sec)	$e_{X,e}$ (%)	$\omega_{L.C.,e}$ (rad/sec)	$e_{\omega,e}$ (%)
1	15.80	53.4	1.315	60.6
2	29.81	116	1.976	40.8
3	46.20	124	3.095	7.34
4	54.49	13.1	2.992	10.4
5	65.58	12.8	3.111	7.29
6	89.70	22.7	5.108	52.9

7	163.5	67.0	5.712	75.5
8	199.8	65.0	5.512	65.0

Με την βοήθεια των στοιχείων του Πίν. 6-3 σχεδιάζεται η γραφική παράσταση του σφάλματος στον προσδιορισμό του πλάτους και της συχνότητας του L.C. σε συνάρτηση με την μεταβλητή ΔG .



Σχήμα 6-18. Γραφική παράσταση του σφάλματος στην προσέγγιση της τιμής του πλάτους και της συχνότητας του L.C όταν χρησιμοποιείται PD κατευθυντής.

Από την γραφική παράσταση του Σχ. 6-18, φαίνεται ότι προβλέπεται, με ένα αρκετά ικανοποιητικό σφάλμα, το πλάτος και η συχνότητα του L.C. όταν η μεταβλητή ΔG παίρνει τιμές μεταξύ των 7dB και των 10dB. Εν μέρει, δηλαδή, επιβεβαιώνεται η αναμενόμενη μείωση του σφάλματος με την αύξηση της τιμής της μεταβλητής ΔG . Ωστόσο, ενώ για τιμές μεγαλύτερες των 10dB οι τιμές του σφάλματος θα έπρεπε να μειώνονται συνεχώς, εμφανίζεται ακριβώς το αντίθετο.

Ένας παράγοντας που μπορεί να επηρεάζει αυτήν την απόκλιση είναι οι πολύ μεγάλες ταχύτητες (πολύ μεγάλο πλάτος) που εμφανίζονται σ' αυτές τις περιπτώσεις, με αποτέλεσμα ενδεχόμενες αποκλίσεις της τριβής αντιστάθμισης από την πραγματική (συγκεκριμένα του συντελεστή ιξώδους τριβής) να επιδρούν σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό.

Ένας, ακόμη, παράγοντας θα μπορούσε να είναι μία ενδεχόμενη απόκλιση στον υπολογισμό της ροπής αδράνειας του συστήματος η οποία επηρεάζει άμεσα την τιμή της θεωρητικά προβλεπόμενης συχνότητας του L.C.

6.3.2.2 PID κατευθυντής

Αν χρησιμοποιείται PID κατευθυντής, όπως χρησιμοποιήθηκε στο Σχ. 5-15, τότε η συνάρτηση μεταφοράς του γραμμικού τμήματος του συστήματος υπολογίζεται πάλι από το δομικό διάγραμμα του Σχ. 6-14, εφ' όσον αντικατασταθεί ο PD κατευθυντής με έναν PID κατευθυντή. Ειδικότερα, αν θεωρηθεί αμελητέα η επίδραση του φίλτρου G_{filter} , προκύπτει ότι:

$$G_L(s) = \frac{s^2}{J_{o\lambda}s^3 + (\Delta b + K_T K_{amp} K_d)s^2 + K_T K_{amp} K_p s + K_T K_{amp} K_p K_i} \quad (6-23)$$

ή ισοδύναμα:

$$G_L(s) = \frac{-\omega^2}{\left[K_T K_{amp} K_p K_i - (\Delta b + K_T K_{amp} K_d)\omega^2 \right] + (K_T K_{amp} K_p \omega - J_{o\lambda} \omega^3)j} \quad (6-24)$$

Από τις Εξ. (6-19), (6-23) προκύπτει ότι το πλάτος και η συχνότητα του L.C., αν υποτεθεί ότι $X > \sqrt{3.5}\dot{\theta}_{str}$, δίνονται από την εξίσωση:

$$\begin{cases} X_{L.C.} = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{-\Delta T_c}{-(\Delta b + K_{amp} K_T K_d) + K_i J_{o\lambda}} \\ \omega_{L.C.} = \sqrt{\frac{K_{amp} K_T K_p}{J_{o\lambda}}} \end{cases} \quad (6-25)$$

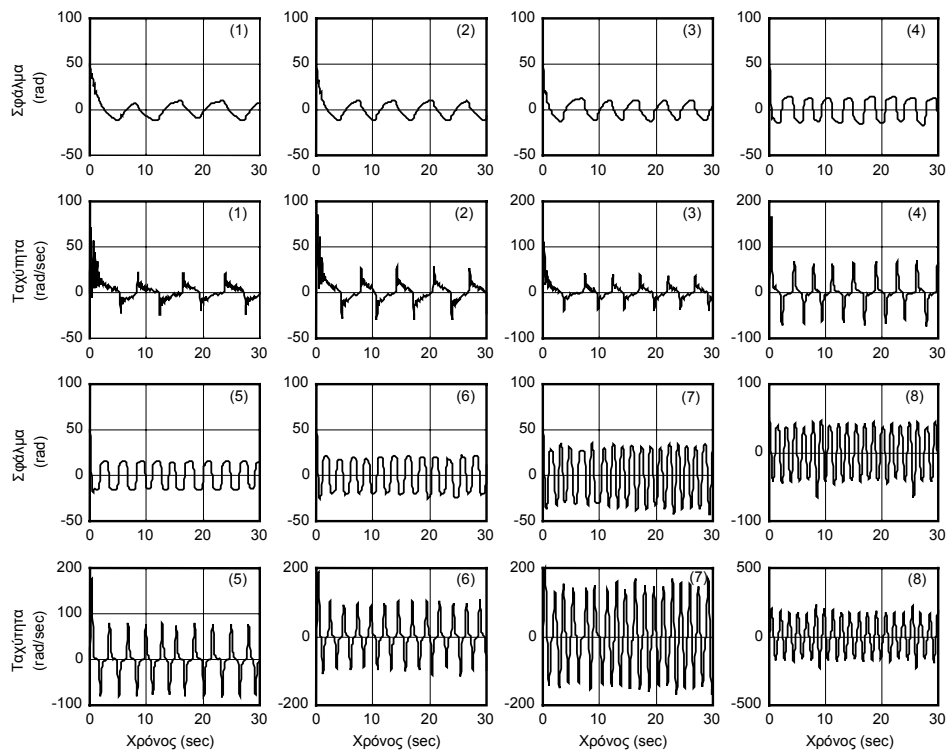
Στον Πίν. 6-4 παρατίθενται ορισμένες περιπτώσεις υπερεκτίμησης των παραμέτρων της τριβής που οδηγούν σε εντοπισμό L.C. Γι' αυτές τις περιπτώσεις έχει υπολογιστεί η θεωρητικά προβλεπόμενη τιμή του πλάτους και της συχνότητας του L.C. καθώς και η τιμή της διαφοράς ΔG , όπως ορίστηκε στην Παρ. 5.2.2.4. Ως πραγματικές τιμές της τριβής Coulomb και του συντελεστή ιξώδους τριβής λαμβάνονται οι πειραματικά προσδιορισθείσες μέσες τιμές τους κατά μήκος του οδηγού κοχλία.

Πίνακας 6-4. Περιπτώσεις υπερεκτίμησης των παραμέτρων της τριβής που οδηγούν σε εντοπισμό L.C. όταν χρησιμοποιείται PID κατευθυντής.

α.α.	K_p	K_d	K_i	ΔT_c	Δb	ΔG	$X_{L.C.}$	$\omega_{L.C.}$
	$\left(\frac{Volt}{rad} \right)$	$\left(\frac{Volt \cdot sec}{rad} \right)$	$\left(\frac{1}{sec} \right)$	(Nm)	$\left(\frac{Nm \cdot sec}{rad} \right)$	(dB)	$\left(\frac{rad}{sec} \right)$	$\left(\frac{rad}{sec} \right)$

	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-3}$			
1	7.96	15.9	0.100	-5.41	-0.152	0.707	10.6	3.34
2	7.96	11.9	0.100	-5.41	-0.152	1.20	14.3	3.34
3	7.96	7.96	0.100	-5.41	-0.152	2.38	21.8	3.34
4	7.96	3.98	0.100	-5.41	-0.152	6.28	46.2	3.34
5	7.96	3.98	0.100	-5.41	-0.395	7.51	55.3	3.34
6	7.96	3.98	0.100	-5.41	-0.638	9.10	68.6	3.34
7	7.96	3.98	0.100	-5.41	-0.881	11.3	90.6	3.34
8	7.96	3.98	0.100	-5.41	-1.00	12.7	107	3.34

Οι αποκρίσεις σφάλματος και ταχύτητας που προέκυψαν για κάθε μία από τις περιπτώσεις υπερεκτίμησης του Πίν. 6-4 φαίνονται στο σχήμα:



Σχήμα 6-19. Αποκρίσεις σφάλματος και ταχύτητας σε διάφορες περιπτώσεις υπερεκτίμησης των παραμέτρων της τριβής όταν χρησιμοποιείται PID κατευθυντής.

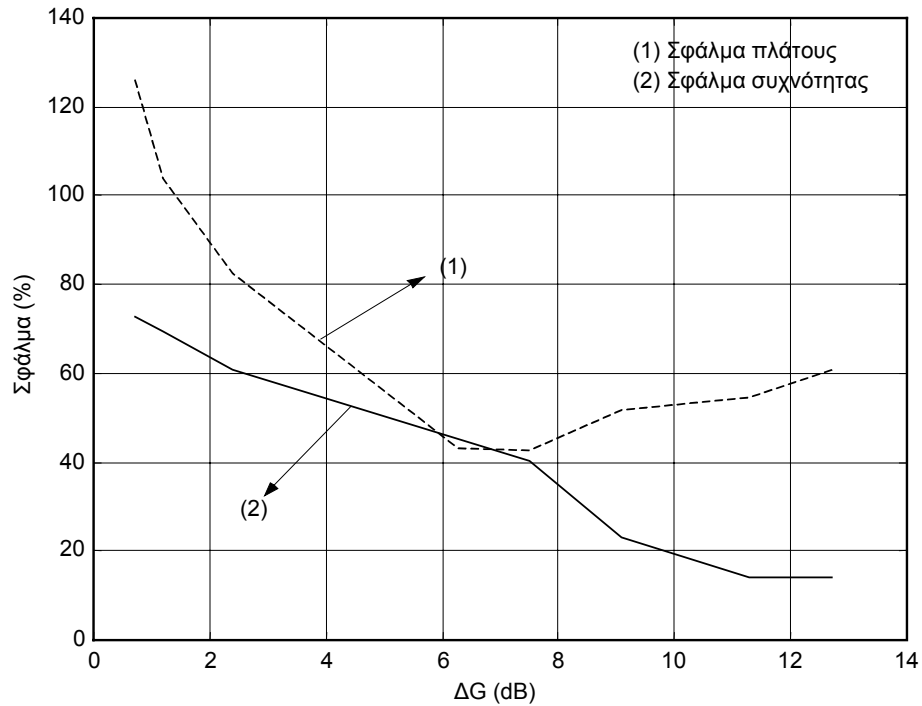
Οι τιμές του πλάτους και της συχνότητας των αποκρίσεων του Σχ. 6-19, καθώς και τα αντίστοιχα σφάλματα στον προσδιορισμό του από την D.F.A., παρατίθενται στον πίνακα:

Πίνακας 6-5. Πειραματικές τιμές του πλάτους και της συχνότητας του L.C. για διάφορες περιπτώσεις υπερεκτίμησης των παραμέτρων της τριβής όταν χρησιμοποιείται PID κατευθυντής.

α.α.	$X_{L.C.,e}$ (rad / sec)	$e_{X,e}$ (%)	$\omega_{L.C.,e}$ (rad / sec)	$e_{\omega,e}$ (%)
1	23.9	126	0.917	72.5
2	29.2	104	1.03	69.2
3	39.8	82.5	1.31	60.8
4	66.2	43.3	1.83	45.2
5	78.8	42.5	2.00	40.1
6	104	51.6	2.57	23.1
7	140	54.5	3.81	14.1
8	172	60.7	3.81	14.1

Με την βοήθεια των στοιχείων του Πίν. 6-5 σχεδιάζεται η γραφική παράσταση του σφάλματος στον προσδιορισμό του πλάτους και της συχνότητας του L.C. σε συνάρτηση με την μεταβλητή ΔG , βλ. Σχ. 6-20.

Από την γραφική παράσταση του Σχ. 6-20, φαίνεται ότι, εν μέρει, επιβεβαιώνεται η αναμενόμενη μείωση του σφάλματος με την αύξηση της τιμής της μεταβλητής ΔG . Ωστόσο, εμφανίζεται, όπως και στην περίπτωση του PD κατευθυντή, το ίδιο φαινόμενο της αύξησης του σφάλματος μετά από κάποιο σημείο. Οι αιτίες εμφάνισης αυτού του φαινομένου μπορούν να αποδοθούν στους λόγους που αναφέρθηκαν στην περίπτωση του PD κατευθυντή.



Σχήμα 6-20. Γραφική παράσταση του σφάλματος στην προσέγγιση της τιμής του πλάτους και της συχνότητας του L.C όταν χρησιμοποιείται PID κατευθυντής.

6.3.3 Εφαρμογή νόμων ελέγχου με αντιστάθμιση

Επιδιώκοντας την όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια στην απόκριση θέσης του συστήματος, και δεδομένων των παρατηρήσεων της Παρ. 6.3.1, η χρησιμοποίηση του γενικού κινητικού μοντέλου τριβής, βλ. Εξ. (6-17), καθίσταται επιτακτική. Ωστόσο, για λόγους πληρότητας θα χρησιμοποιηθούν και τα υπόλοιπα δύο μοντέλα τριβής, βλ. Εξ. (6-15), (6-16).

Στις εξισώσεις περιγραφής των μοντέλων τριβής, τα χαρακτηριστικά μεγέθη της τριβής δεν λαμβάνονται με τις μέσες τιμές τους, αλλά με τις τιμές τις εξαρτώμενες από την θέση της κινούμενης μάζας, σύμφωνα με τις πειραματικές μετρήσεις του Σχ. 6-12. Επιπλέον, σ' όλα τα μοντέλα τριβής η ταχύτητα θεωρείται μηδενική μέσα σε ένα μικρό διάστημα γύρω από το μηδέν, διότι είναι πολύ δύσκολο η ταχύτητα να γίνει ακριβώς ίση με το μηδέν. Τότε, οι εξισώσεις των μοντέλων τριβής που χρησιμοποιούνται για αντιστάθμιση, βλ. Εξ. (6-15), (6-16), (6-17), ανάγονται στις ακόλουθες:

1. Κλασσικό μοντέλο τριβής (Coulomb+ιξώδης τριβή):

$$T_{f,cv}(\omega) = \begin{cases} \bar{T}_c \operatorname{sgn}(\omega) + \bar{b}\omega, & \alpha\nu \quad |\omega| \geq \Delta V \\ 0, & \alpha\nu \quad |\omega| < \Delta V \end{cases} \quad (6-26)$$

2. Κλασσικό μοντέλο τριβής (Ροπή αποδέσμευσης+ιξώδης τριβή):

$$T_{f,bv}(\omega) = \begin{cases} \bar{T}_s \operatorname{sgn}(\omega) + \bar{b}\omega, & \alpha\nu \quad |\omega| \geq \Delta V \\ 0, & \alpha\nu \quad |\omega| < \Delta V \end{cases} \quad (6-27)$$

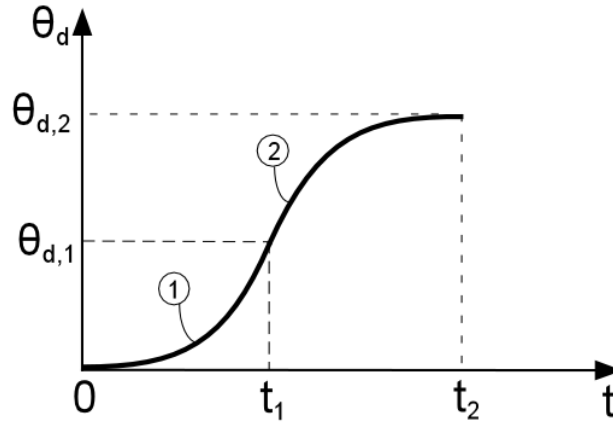
3. Γενικό κινητικό μοντέλο τριβής:

$$T_{f,gk}(\omega) = \begin{cases} \left[\bar{T}_c + (\bar{T}_s - \bar{T}_c) \exp(-|\omega/\bar{\omega}_{str}|^2) \right] \operatorname{sgn}(\omega) + \bar{b}\omega, & \alpha\nu \quad |\omega| \geq \Delta V \\ 0, & \alpha\nu \quad |\omega| < \Delta V \end{cases} \quad (6-28)$$

με:

$$\Delta V = 20 \text{ counts / sec} = 0.25 \text{ rad / sec}$$

Τα τρία μοντέλα, που περιγράφονται από τις Εξ. (6-26), (6-27), (6-28), χρησιμοποιούνται σε δύο διαφορετικά σχέδια αντιστάθμισης. Το πρώτο έχει σκοπό την μείωση του σφάλματος μόνιμης κατάστασης, ενώ το δεύτερο την μείωση του σφάλματος κατά την παρακολούθηση μιας τροχιάς (tracking). Και στις δύο περιπτώσεις η είσοδος στο σύστημα, που καθορίζει την επιθυμητή θέση σε κάθε χρονική στιγμή (ή την επιθυμητή τροχιά), είναι η ίδια, και είναι αυτή που εικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 6-21. Τροχιά παρακολούθησης κατά μήκος του κοχλία-οδηγού.

Ο σχεδιασμός της συγκεκριμένης τροχιάς και τα κριτήρια επιλογής των παραμέτρων της παρατίθενται στο Παράρτημα Α.

6.3.3.1 Μείωση σφάλματος μόνιμης κατάστασης

Για την μείωση του σφάλματος μόνιμης κατάστασης χρησιμοποιήθηκαν τέσσερις διαφορετικοί τρόποι ελέγχου, που είναι οι εξής:

- PD έλεγχος, (PD):

$$T_{m,pd} = K_p(\theta_d - \theta) - K_d\omega = K_p e - K_d\omega \quad (6-29)$$

- PD έλεγχος+αντιστάθμιση τριβής με το μοντέλο «Coulomb+ιξώδης τριβή», (PDCV):

$$T_{m,pdcv} = T_{m,pd} + T_{f,cv} \quad (6-30)$$

- PD έλεγχος+αντιστάθμιση τριβής με το μοντέλο «ροπή αποδέσμευσης+ ιξώδης τριβή», (PDBV):

$$T_{m,pdbv} = T_{m,pd} + T_{f,bv} \quad (6-31)$$

- PD έλεγχος+αντιστάθμιση τριβής με το «γενικό κινητικό μοντέλο τριβής», (PDGK):

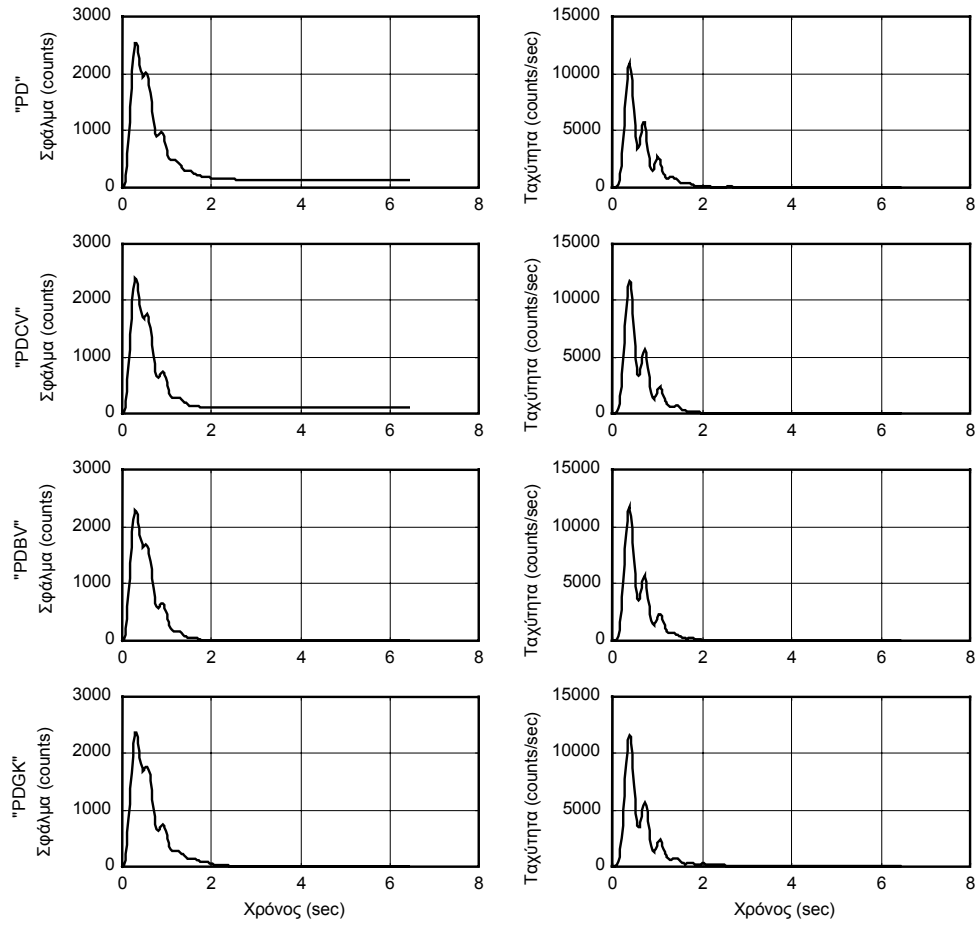
$$T_{m,pdgg} = T_{m,pd} + T_{f,gk} \quad (6-32)$$

Σε κάθε έναν από τους προηγούμενους τρόπους ελέγχου επιλέχθηκαν τα μέγιστα δυνατά κέρδη του PD κατευθυντή με την προϋπόθεση ότι η απόσβεση του συστήματος είναι $\zeta \cong 1$, βλ. Παράρτημα Β.1, και ότι δεν εμφανίζεται L.C. Σ' αυτήν την περίπτωση, για κάθε έναν από τους τέσσερις διαφορετικούς τρόπους ελέγχου και όταν ως είσοδος στο σύστημα χρησιμοποιείται η καμπύλη του Σχ. 6-21, οι αποκρίσεις σφάλματος και ταχύτητας του συστήματος εικονίζεται στα Σχ. 6-22. Ως τελική επιθυμητή θέση έχει επιλεγεί να είναι, σύμφωνα με το Σχ. 6-21, το σημείο:

$$(t_2 = 0.4 \text{ sec}, \theta_{d,2} = 5000 \text{ counts}) \quad (6-33)$$

ενώ τα κέρδη που επιλέχθηκαν με βάσει τα δύο προαναφερθέντα κριτήρια είναι τα ακόλουθα:

$$K_p = 0.0050 \text{ Volt/count}, \quad K_d = 0.0015 \text{ Volt/count/sec} \quad (6-34)$$



Σχήμα 6-22. Αποκρίσεις σφάλματος και ταχύτητας για διάφορες μεθόδους ελέγχου με σκοπό την μείωση του σφάλματος μόνιμης κατάστασης.

Αποσκοπώντας στην εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων όσον αφορά το σφάλμα μόνιμης κατάστασης σε κάθε έναν από τους τέσσερις διαφορετικούς τρόπους ελέγχου, καταγράφηκαν, για κάθε έναν απ' αυτούς, τα σφάλματα μόνιμης κατάστασης δέκα επαναλαμβανόμενων αποκρίσεων θέσης για τέσσερις διαφορετικές τελικές θέσεις. Ειδικότερα, οι τελικές θέσεις και τα αντίστοιχα κέρδη του PD κατευθυντή που επιλέχθηκαν είναι:

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \theta_{d,2,\alpha} &= 3000 \text{ counts}, K_{p,\alpha} = 0.0070 \text{ Volt / count}, K_{d,\alpha} = 0.0017 \text{ Volt / count / sec} \\
 (\beta) \theta_{d,2,\beta} &= 4000 \text{ counts}, K_{p,\beta} = 0.0060 \text{ Volt / count}, K_{d,\beta} = 0.0015 \text{ Volt / count / sec} \\
 (\gamma) \theta_{d,2,\gamma} &= 5000 \text{ counts}, K_{p,\gamma} = 0.0050 \text{ Volt / count}, K_{d,\gamma} = 0.0015 \text{ Volt / count / sec} \\
 (\delta) \theta_{d,2,\delta} &= 6000 \text{ counts}, K_{p,\delta} = 0.0040 \text{ Volt / count}, K_{d,\delta} = 0.0014 \text{ Volt / count / sec}
 \end{aligned} \tag{6-35}$$

Τα σφάλματα μόνιμης κατάστασης που προέκυψαν φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας 6-6. Σφάλμα μόνιμης κατάστασης για τέσσερις τρόπους ελέγχου και για τέσσερις τελικές θέσεις.

α.α.	Σφάλμα μόνιμης κατάστασης, $e_{ss}(counts)$															
	PD				PDCV				PDBV				PDGK			
	(α)	(β)	(γ)	(δ)	(α)	(β)	(γ)	(δ)	(α)	(β)	(γ)	(δ)	(α)	(β)	(γ)	(δ)
1	108	115	151	186	40	43	79	65	12	31	2	16	10	7	22	19
2	130	146	139	195	42	36	104	72	-1	22	-1	16	19	25	7	7
3	126	131	144	185	56	88	91	141	-14	13	-9	17	17	3	-1	7
4	108	149	147	158	41	46	86	92	-3	18	1	17	18	-6	11	2
5	107	142	158	188	48	51	88	82	-15	-2	19	10	19	-5	18	24
6	103	119	150	180	49	49	85	94	5	-5	25	13	-10	29	9	26
7	121	121	153	159	56	48	84	102	14	6	2	7	-7	-3	24	26
8	107	146	146	171	45	48	90	84	-12	32	20	29	-6	4	18	31
9	111	119	174	194	44	57	84	131	-5	11	4	10	2	26	-1	-11
10	110	131	144	231	47	50	87	88	-2	-4	15	15	-5	8	16	19

Υποθέτοντας ότι η τιμή του σφάλματος μόνιμης κατάστασης ακολουθεί την κανονική κατανομή, τότε οι μέσες τιμές και οι τυπικές αποκλίσεις των προηγούμενων μετρήσεων δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

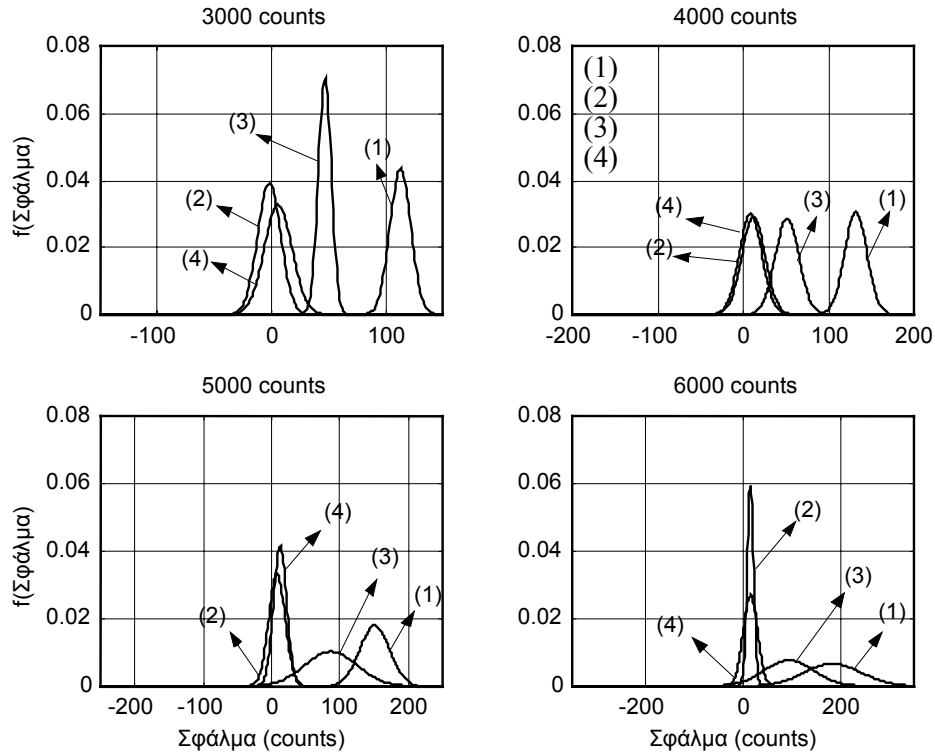
Πίνακας 6-7. Μέση τιμή και τυπική απόκλιση του σφάλματος μόνιμης κατάστασης για τέσσερις μεθόδους ελέγχου και για τέσσερις τελικές θέσεις.

Έλεγχος	Μέση τιμή, $\mu_e(counts)$				Τυπική απόκλιση, $\sigma_e(counts)$			
	(α)	(β)	(γ)	(δ)	(α)	(β)	(γ)	(δ)
PD	113.1	131.9	150.6	184.7	9.171	13.04	22.01	59.45
PDCV	46.8	51.6	87.8	95.1	5.673	13.90	38.73	51.81
PDBV	-2.1	12.2	7.8	15.0	10.14	13.65	12.03	6.687
PDGK	5.7	8.8	12.3	15.0	12.13	13.23	9.584	14.79

Με την βοήθεια της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης του σφάλματος μόνιμης κατάστασης υπολογίζεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας από την εξίσωση:

$$f(e_{ss}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_e} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}(e_{ss} - \mu_e)^2\right\} \equiv N(e_{ss} | \mu_e, \sigma_e^2), e_{ss} \in R \quad (6-36)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για κάθε μέθοδο ελέγχου και για κάθε τελική θέση έχει σχεδιαστεί στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 6-23. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του σφάλματος μόνιμης κατάστασης για τέσσερις μεθόδους ελέγχου και για τέσσερις τελικές θέσεις.

Επίσης, χρησιμοποιώντας τα πειραματικά αποτελέσματα της μέσης τιμής του σφάλματος μόνιμης κατάστασης, βλ. Πίν. 6-7, υπολογίζεται το ποσοστό μείωσής της που επιτυγχάνουν οι μέθοδοι ελέγχου PDCV, PDBV, PDGK, σε σύγκριση με την μέθοδο PD. Τα ποσοστά αυτά παρατίθενται στον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας 6-8. Ποσοστό μείωσης του σφάλματος μόνιμης κατάστασης για τις μεθόδους ελέγχου PDCV, PDBV, PDGK σε σύγκριση με την μέθοδο PD και για τέσσερις τελικές θέσεις.

Έλεγχος	Ποσοστό μείωσης του e_{ss}			
	(α)	(β)	(γ)	(δ)
PDCV	58.6%	60.9%	41.7%	48.5%
PDBV	98.1%	90.8%	94.7%	91.9%
PDGK	95.0%	93.3%	91.8%	91.9%

Από το Σχ. 6-23 και τον Πίν. 6-8 προκύπτει ότι από τις τέσσερις μεθόδους ελέγχου, εκείνες που οδηγούν σε σημαντική μείωση του σφάλματος μόνιμης κατάστασης είναι οι PDBV, PDGK. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο, διότι και στις δύο μεθόδους ελέγχου το μοντέλο αντιστάθμισης της τριβής ενσωματώνει την ροπή αποδέσμευσης, δηλαδή την μέγιστη τιμή της στατικής τριβής.

Από τις εξισώσεις περιγραφής των ροπών ελέγχου για τις μεθόδους PDBV, PDGK, βλ. Εξ. (6-31), (6-32), αντίστοιχα, προκύπτει ότι το σφάλμα μόνιμης κατάστασης, δηλαδή το σφάλμα όταν η ταχύτητα και η επιτάχυνση τείνει στο μηδέν, εξαρτάται αποκλειστικά από την ροπή αποδέσμευσης, διότι τότε η ροπή ελέγχου είναι ίση με:

$$T_{m,ss} = K_p e_{ss} + \bar{T}_s, \text{ όταν } (\omega, \dot{\omega}) \rightarrow (0,0) \quad (6-37)$$

Επομένως, η σύγκριση του σφάλματος μόνιμης κατάστασης για τις διάφορες μεθόδους ελέγχου δεν μπορεί να αποτελέσει κριτήριο για την συμπεριφορά των μοντέλων τριβής κατά την διάρκεια της κίνησης. Γι' αυτόν τον λόγο στην επόμενη ενότητα γίνεται προσπάθεια μείωσης του σφάλματος κατά την συνολική διάρκεια της κίνησης.

6.3.3.2 Μείωση σφάλματος παρακολούθησης τροχιάς

Για την μείωση του σφάλματος κατά την συνολική διάρκεια της κίνησης, δηλαδή του σφάλματος παρακολούθησης τροχιάς, χρησιμοποιήθηκαν τέσσερις διαφορετικοί τρόποι ελέγχου, που είναι οι εξής:

- "Model Based" έλεγχος, (MB):

$$T_{m,mb} = J_{o\lambda} \left[\ddot{\theta}_d + K_d (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + K_p (\theta_d - \theta) \right] = J_{o\lambda} (\ddot{\theta}_d + K_d \dot{\theta} + K_p \theta) \quad (6-38)$$

- MB έλεγχος+αντιστάθμιση τριβής με το μοντέλο «Coulomb+ιξώδης τριβή», (MBCV):

$$T_{m,mbcv} = T_{m,mb} + T_{f,cv} \quad (6-39)$$

- MB έλεγχος+αντιστάθμιση τριβής με το μοντέλο «ροπή αποδέσμευσης+ιξώδης τριβή», (MBBV):

$$T_{m,mbbv} = T_{m,mb} + T_{f,bv} \quad (6-40)$$

- MB έλεγχος+αντιστάθμιση τριβής με το «γενικό κινητικό μοντέλο τριβής», (MBGK):

$$T_{m,mbgk} = T_{m,mb} + T_{f,gk} \quad (6-41)$$

Σε κάθε έναν από τους προηγούμενους τρόπους ελέγχου επιλέχθηκαν τα μέγιστα δυνατά κέρδη του PD κατευθυντή με την προϋπόθεση ότι η απόσβεση του συστήματος είναι $\zeta \cong 1$, βλ. Παράρτημα Β.2, και ότι δεν εμφανίζεται L.C. Σ' αυτήν την περίπτωση, για κάθε έναν από τους τέσσερις διαφορετικούς τρόπους ελέγχου και όταν ως είσοδος στο σύστημα χρησιμοποιείται η καμπύλη του Σχ. 6-21, οι αποκρίσεις θέσης του συστήματος εικονίζονται στο Σχ. 6-24. Επίσης, έχει σχεδιαστεί η αντίστοιχη απόκριση για την περίπτωση του απλού PD ελέγχου προκειμένου να συγκριθεί με τον MB έλεγχο. Ως τελική επιθυμητή θέση έχει επιλεγεί να είναι, σύμφωνα με το Σχ. 6-21, το σημείο:

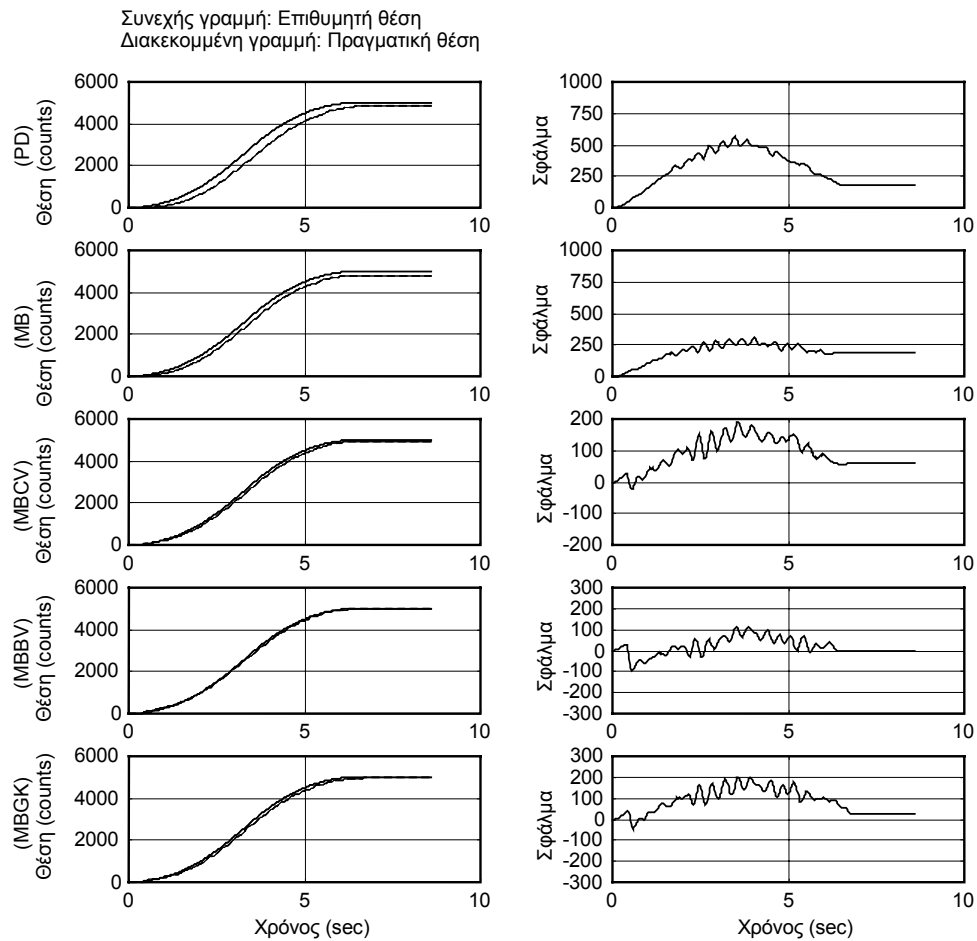
$$(t_2 = 0.4 \text{ sec}, \theta_{d,2} = 5000 \text{ counts}) \quad (6-42)$$

ενώ τα κέρδη που επιλέχθηκαν με βάσει τα δύο προαναφερθέντα κριτήρια είναι τα ακόλουθα:

$$K_p = 20 \text{ Volt} / (Kg \cdot m^2 \cdot \text{count}), \quad K_d = 5 \text{ Volt} / (Kg \cdot m^2 \cdot \text{count}) / \text{sec} \quad (6-43)$$

Στο Σχ. 6-24 φαίνεται η βελτίωση που επιτυγχάνει η χρησιμοποίηση του ελέγχου "MB" έναντι του απλού ελέγχου "PD". Επίσης, η χρησιμοποίηση αντιστάθμισης μειώνει το σφάλμα παρακολούθησης της επιθυμητής τροχιάς. Μάλιστα, η μέθοδος (MBBV) φαίνεται να είναι η περισσότερο αποτελεσματική, ενώ στις περιπτώσεις των μεθόδων (MBCV), (MBGK) το σφάλμα είναι μεγαλύτερο.

Ωστόσο, από το Σχ. 6-24, δεν μπορούν να εξαχθούν γενικά συμπεράσματα για την συμπεριφορά των μοντέλων τριβής σε όλες, ανεξαιρέτως, τις μορφές επιθυμητών τροχιών. Για αυτόν τον λόγο, η περαιτέρω διερεύνηση του συγκεκριμένου προβλήματος θα αποτελέσει θέμα μελλοντικής εργασίας.



Σχήμα 6-24. Αποκρίσεις θέσης για διάφορες μεθόδους ελέγχου με σκοπό την μείωση του σφάλματος παρακολούθηση τροχιάς.

7 Συμπεράσματα και Μελλοντική Εργασία

7.1 Συμπεράσματα

Σ' αυτήν την διπλωματική εργασία παρουσιάστηκε μία ολοκληρωμένη έρευνα πάνω στον σχεδιασμό συστημάτων ελέγχου με αντιστάθμιση τριβής. Αρχικά μελετήθηκε η φύση της τριβής και τα φαινόμενα που την χαρακτηρίζουν για κάθε είδους κίνηση. Με βάση αυτά τα χαρακτηριστικά πραγματοποιήθηκε η μοντελοποίηση της με σκοπό τον έλεγχο. Εξαιτίας, όμως, της μη γραμμικής φύσης της τριβής κρίθηκε αναγκαία η χρησιμοποίηση μιας μεθόδου ανάλυσης μη γραμμικών συστημάτων.

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε είναι η ανάλυση με Περιγραφική Συνάρτηση, η οποία διακρίνεται για την απλότητά της, την ακρίβεια στα ποιοτικά της αποτελέσματα και την υπό προϋποθέσεις ακρίβεια στον προσδιορισμό της χρονικής απόκρισης ενός συστήματος. Μ' αυτήν την μέθοδο εξετάστηκαν οι επιπτώσεις που έχει η μη ακριβής μοντελοποίηση της τριβής στην απόκριση ενός σερβομηχανισμού και επιβεβαιώθηκε η αναγκαιότητα μοντελοποίησης με μεγάλη ακρίβεια. Παράλληλα βρέθηκαν οι προϋποθέσεις με τις οποίες η συγκεκριμένη μέθοδος ανάλυσης μπορεί να προσδιορίσει τα ποσοτικά χαρακτηριστικά της χρονικής απόκρισης ενός συστήματος με τριβή.

Αξιοποιώντας τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου ανάλυσης με Περιγραφική Συνάρτηση έγινε προσπάθεια αντιστάθμισης τριβής σε έναν σερβομηχανισμό προκειμένου να μειωθεί όσο το δυνατόν περισσότερο το σφάλμα μόνιμης κατάστασης και παρακολούθησης τροχιάς. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκαν διάφορα μοντέλα τριβής με σκοπό την σύγκρισή τους ως προς την αποτελεσματικότητά τους στην αντιστάθμιση τριβής.

Ειδικότερα, όσον αφορά τα πειραματικά αποτελέσματα επετεύχθει ο βασικός στόχος αυτής της εργασίας, που ήταν η εξάλειψη της επίδρασης της τριβής στην απόκριση θέσης του σερβομηχανισμού. Συγκεκριμένα, το σφάλμα μόνιμης κατάστασης όσο και το σφάλμα παρακολούθησης πορείας περιορίστηκε σε πολύ χαμηλά επίπεδα.

7.2 Μελλοντική Εργασία

Επιδιώκοντας την συνεχή αναζήτηση νέων και αποδοτικότερων λύσεων στα προβλήματα υψηλής ακρίβειας απόκρισης θέσης και παρακολούθησης τροχιάς, μελλοντικές εργασίες θα μπορούσαν να αποτελέσουν οι εξής:

- η σύγκριση μοντέλων τριβής που θα μοντελοποιούν και άλλες ιδιότητες της, όπως, για παράδειγμα, εκείνες που διέπουν την προ-ολίσθησης κίνηση,

- η εξαγωγή γενικότερων συμπερασμάτων για την απόδοση διάφορων μοντέλων τριβής στην μείωση του σφάλματος παρακολούθησης τροχιάς.

Βιβλιογραφία

- [1] Κρικέλης, Ν., «Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο,» Εκδόσεις Συμμετρία, 3^η Έκδοση, Αθήνα, 1992.
- [2] Κρικέλης, Ν., «Μοντελοποίηση & Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων,» Εκδοτικός οργανισμός Γ. Φούντας, 3^η Έκδοση, Αθήνα, 1998.
- [3] Μανιώτης, Δ., «Σχεδιασμός και Έλεγχος Ηλεκτρομηχανικών Πειραματικών Διατάξεων,» Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Μ.Κ. & Α.Ε., Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2000.
- [4] Παπαδόπουλος, Ε., «Ηλεκτρομηχανικά Συστήματα Μετατροπής Ενέργειας,» Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1999.
- [5] Altpeter, F., P. Myszkowski, and R. Longchamp, "Identification for control of drives with friction," *IFAC Conf. of Control of Industrial Systems*, Belfort, France, May 20-22, 1997, pp.673-677.
- [6] Altpeter, F., P. Myszkowski, M. Kocher and R. Longchamp, "Friction Compensation: PID Synthesis and State Control," *European Control Conference*, Brussels (Belgium), Session TH-M 11, Paper No. ECC192, July 1-4, 1997.
- [7] Altpeter, F., F. Ghorbel and R. Longchamp, "Relationship Between Two Friction Models: A Singular Perturbation Approach", *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision & Control*, Tampa, Florida USA, December 1998.
- [8] Altpeter, F., Dan Neculescu and R. Longchamp, "Friction Modeling and Identification Issues for Electric Drives," *Electromotion '97*, Cluj-Napoca, Romania, May 8-9, 1997, pp. 149-154.
- [9] Altpeter, F., F. Ghorbel and R. Longchamp, "A singular Perturbation analysis of two friction models applied to a vertical EDM-Axis," *Motion Control '98*, Grenoble, France, September 21-23, 1998, pp. 7-12.
- [10] Amin, B., "The reliability of describing function predictions for systems with friction," M.S. Thesis, Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, University of Wisconsin, Milwaukee, 1993.
- [11] Amontons, G., "On the resistance originating in machines," *Proceedings of the French Royal Academy of Sciences*, 1699, pp. 206-22.
- [12] Andersson, S., "Seminar at the Department of Automatic Control," Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1993.
- [13] Armstrong-Helouvry, B., "Control of Machines with Friction," Kluwer Academic Publishers, Boston, Ma., 1991.
- [14] Armstrong-Helouvry, B., "Stick Slip and Control in Low-Speed Motion", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, No. 10, October 1993.
- [15] Armstrong-Helouvry, B., P. Dupont and C. Canudas de Wit, "A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines with Friction," *Automatica*, Vol. 30(7), 1994, pp. 1083-1138.
- [16] Armstrong-Helouvry, B. and B. Amin, "PID Control in the Presence of Static Friction: Exact and Describing Function Analysis," *Proceedings of the American Control Conference*, Baltimore, Maryland, June 1994.
- [17] Armstrong-Helouvry, B., "Frictional Memory in Servo Control," *Proceedings of the American Control Conference*, Baltimore, Maryland, June 1994.
- [18] Armstrong B. and B. Amin, "PID Control in the Presence of Static Friction: A Comparison of Algebraic and Describing Function Analysis", *Automatica*, Vol. 32, No 5, 1996, pp. 679-692.
- [19] Biel, C., "Die Reibung in Gliedlagern bei Zusatz von Vooltool zu Mineralol und bei Veränderung der Unlaufzahl und der Temperatur," *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, Vol. 64, 1920, pp. 449-483.

-
- [20] Bliman, P. A. and M. Sorine, "Friction modeling by hysteresis operators, application to Dahl, stiction and Stribeck effects," *Proceedings of the Conference "Models of Hysteresis"*, Trento, Italy, 1991.
 - [21] Bliman, P. A. and M. Sorine, "A system-theoretic approach of systems with hysteresis. Application to friction modeling and compensation," *Proceedings of second European Control Conference*, Croningen, The Netherlands, 1993, pp. 1844-1849.
 - [22] Bliman, P. A. and M. Sorine, "Easy-to-use realistic dry friction models for automatic control," *Proceedings of third European Control Conference*, Rome, Italy, 1995, pp. 3788-3794.
 - [23] Bohnenblust, H. F., P. Duwez, "Some properties of a mechanical model of plasticity," *J. Appl. Mech.*, 1948, pp. 222-225.
 - [24] Bona, B., M. Indri, "Friction Effects and Compensation in the Hybrid Control", *Proceedings. International Symposium on Intelligent Robotics*, Bangalore, India, 1993, pp. 427 - 436.
 - [25] Bona, B., M. Indri, "Friction Compensation and Robustness Issues in Force/Position Controlled Manipulators," *IEE Proceedings, Control Theory and Applications*, vol. 142(6), 1995, pp. 569-574.
 - [26] Bowden, F. P. and L. Leben, "The nature of sliding and the analysis of friction," *Proceedings of the Royal Society, Series A*, Vol. 169, 1939, pp. 371-391.
 - [27] Bowden, F. P. and D. Tabor, "Friction-an Introduction to Tribology," Anchor Press/Doubleday; Reprinted 1982, Malabar: Krieger Publishing Co, NY, 1973.
 - [28] Brandenburg, G., "Stability of a speed-controlled elastic two-mass system with backlash and Coulomb friction and Optimization by a load observer," *Proceedings IMACS-IFACS Symp. on Modeling and Simulation for Control of Lumped and Dist. Parameter Systems*, IFAC, Lilly, 1986, pp. 371-381: (In P. Borne and Tzafestas (Eds), *Applied Modelling and Simulation Technological Systems*, Elsevier, Amsterdam).
 - [29] Brandenburg, G., and U. Schafer, "Influence and partial compensation of simultaneously acting backlash and Coulomb friction in a position- and speed-controlled elastic two-mass system," *Proceedings 2nd European Conf. on Power Electronics and Applications*, EPE, Grenoble, 1987, pp. 1041-1047.
 - [30] Brandenburg, G., and U. Schafer, "Stability analysis and optimization of a position-controlled elastic two-mass-system with backlash and Coulomb friction," *Proceedings 12th IMACS World Congress*, IMACS, Paris, 1988a, pp. 220-223.
 - [31] Brandenburg, G., and U. Schafer, "Influence and partial compensation of simultaneously acting backlash and Coulomb friction in a position- and speed-controlled elastic two-mass system," *Proceedings 2nd Int. Conf. On Electrical Drives*, ICED, Poisina Brasov, 1988b.
 - [32] Brandenburg, G., and U. Schafer, "Influence and compensation of Coulomb friction in industrial pointing and tracking systems," *Proceedings of the Indus. App. Soc. Annual Meeting*, IEEE, Dearborn, MI, 1991, pp. 1407-1413.
 - [33] Brogan, W. L., "Modern Control Theory," Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
 - [34] Canudas de Wit, C., P. Noel, A. Aubin and B. Brogliato, "Adaptive friction compensation in robot manipulators: low velocities," *The Inter. J. of Robotics Research*, Vol. 10(3), 1991, pp. 189-199.
 - [35] Canudas de Wit, C., H. Olsson, K.J. Astrom and P. Lischinsky, "Dynamic Friction Models and Control Design," *Proceedings of the American Control Conference*, San Francisco, California, June 1993.
 - [36] Canudas de Wit, C., H. Olsson, K. J. Astrom and P. Lischinsky, "A new model for control of systems with friction", in *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, no. 3, March 1995, pp. 419-425.
 - [37] Chen, W. F., D. J. Han, "Plasticity for Structural Engineers", *Springer*, 1991, pp. 7-11.
-

-
- [38] Coulomb, C. A., "Theorie des machines simples, en ayant egard au frottement de leurs parties, et a la roideur deus cordages", *Mem. Math Phys.*, Craig, J. J., pp. 161-342.
 - [39] Cockerham, G. and M. Cole, "Stick-slip stability by analogue simulation," *Wear*, 36(2), 1976, pp. 189-198.
 - [40] Courtney-Pratt, J. S. and E. Eisner, "The effect of a tangential force on the contact of metallic bodies," *Proceedings R. Soc., Ser. A* 238, 1957, pp. 529-550.
 - [41] Czichos, H. *Tribology*, Elsevier, Amsterdam, 1978.
 - [42] Da Vinci, L., "The Notebooks," Dover, NY, 1519.
 - [43] Dahl, P. R., "A Solid Friction Model," AFO 4695-67-C-0158, Aerospace Corporation, El Segundo, CA, 1968.
 - [44] Derjaguin, B. V., E. Push and D.M. Tolstoi, "A theory of stick-slip sliding of solids," *Proceedings of the Conference on Lubrication and Wear*, Instn. Mech. Engs., London, 1957, pp. 257-268.
 - [45] Dieterich, J. H., "Micro-mechanics of slip instabilities with rate- and state-dependent friction," *Eos, Trans. Am. Geophys. Union*, 1991.
 - [46] Dupont, P. and E. Dunlap, "Friction modeling and control in boundary lubrication," *Proceedings 1993 American Control Conference*, AACC, San Francisco, CA, 1993, pp. 1915-1919.
 - [47] Dupont, P. E., "Avoiding Stick-Slip Through PD Control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39(5), May 1994.
 - [48] Dupont, P. E. and E. P. Dunlap, "Friction Modeling and PD Compensation at Very Low Velocities", *Transactions of the ASME*, Vol. 117, March 1995.
 - [49] Ehrich, N. E. and P.S. Krishnaprasad, "An Investigation of Control Strategies for Friction Compensation," M.S. thesis, Dept. of Mechanical Engineering, University of Maryland, 1991.
 - [50] Franklin, F., D. Powell, M. Workman, "Digital Control of Dynamic Systems," 3rd Edition, Addison-Wesley.
 - [51] Fuller, D. D., "Theory and Practice of Lubrication for Engineers," John Wiley and Sons, NY, 1984.
 - [52] Gu, J., J. Rice, A. Ruina and S. Tse, "Slip motion and stability of a single degree of freedom elastic system with rate and state dependent friction", *J. Mech. Phys. Solids*, 1984, Vol. 32(3), pp. 167-196.
 - [53] Haessig, D. and B. Friedland, "On the Modeling and Simulation of Friction," *Proceedings A. C. C.*, San Diego, 1990, pp. 1256-1261.
 - [54] Hayward V. and B. Armstrong, "A New Computational Model of Friction Applied to Haptic Rendering," New York, LNCS, Vol. 250, 2000, pp. 404-412.
 - [55] Henrichfreise, Hermann and Christian Witte, "Experimental Results with Observer-based nonlinear Compensation of Friction in a Positioning System," *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, Leuven, Belgium, May 1998.
 - [56] Hess, D. and A. Soom, "Friction at a lubricated line contact operating at oscillating sliding velocities," *ASME J. of Tribology*, vol. 112(1), January 1990, pp. 147-52.
 - [57] Hess, D. and A. Soom, "Normal vibrations and friction under harmonic loads: part I- Hertzian contacts," *ASME J. of Tribology*, vol. 113(1), 1991, pp. 80-86.
 - [58] Hess, D. and A. Soom, "Normal vibrations and friction under harmonic loads: part II- rough planar contacts," *ASME J. of Tribology*, vol. 113(1), 1991, pp. 87-92.
 - [59] Hsieh Chen and Y. C. Pan, "Dynamic behavior and modeling of the pre-sliding static friction," *Wear*, Vol. 242, 2000, pp. 1-17.
 - [60] Johannes, V. I., M. A. Green, and C. A. Brockley, "The role of the rate of application of the tangential force in determining the static friction coefficient," *Wear*, Vol. 24, 1973, pp. 381-385.
 - [61] Karnopp, D., "Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems", *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1985, 107(1), 100-103.
-

-
- [62] Kato, S., K. Yamaguchi, and T. Matsubayashi, "Stick slip motion of machine tool slideway," *ASME J. of Engineering for Industry*, 1974, Vol. 96(2), pp. 557-566.
 - [63] Kim, Jeong-Du and Chan-Hong Moon, "Stability of a friction driver using a describing function," *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 59, 1996, pp. 315-319.
 - [64] Kolnick, F., "The QNX4 Real-Time Operating System," Basis Computer Systems Inc., 1998.
 - [65] Kwon Dong-Soo and Ki Young Woo, "Control of the Haptic Interface with Friction Compensation and Its Performance Evaluation," *Proceedings of the 2000 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2000.
 - [66] Leonard, N. E. and P.S. Krishnaprasad, "Comparative study of friction-compensating control strategies for servomechanisms," Electrical Engineering Department, University of Maryland, 1991.
 - [67] Leonard, N. E. and P. S. Krishnaprasad, "Adaptive Friction Compensation for Bi-Directional Low-Velocity Position tracking," Electrical Engineering Department, University of Maryland, 1992.
 - [68] Linker, M. F. and J. H. Dieterich, "Effects of variable normal stress on rock friction: observations and constitutive equations," *J. of Geophysical Research*, 1992, Vol. 97(B4), pp. 4923-4940.
 - [69] Liu, J., "Real-Time Systems," Prentice Hall, 2000.
 - [70] Mentzelopoulou, S. and B. Friedland, "Experimental evaluation of friction estimation and compensation techniques," *Proceedings of the American Control Conference*, Baltimore, Maryland, June 1994.
 - [71] Morin, A. J., "New friction experiments carried out at Metz in 1831-1833," *Proceedings of the French Royal Academy of Sciences*, Vol. 4, 1833, pp. 1-128.
 - [72] Osborne, N. A., D. L. Rittenhouse, "The modeling of friction and its affects on fine pointing control, AIAA paper 74-875, 1974, pp. 1-10.
 - [73] Ogata, K., "Modern Control Engineering," Prentice Hall, Inc., 1st Edition, N.J., 1970.
 - [74] Ogata, K., "Modern Control Engineering," Prentice Hall, Inc., 3rd Edition, N.J., 1997.
 - [75] Okubo, P., "Experimental and numerical model studies of frictional instability seismic sources," Ph.D. Dissertation, Department of Earth, Atmospheric and Planetary Sciences, MIT, 1986.
 - [76] Olsson, H., K. J. Astrom, C. Canudas de Wit, M. Gafvert and P. Lischinsky, "Friction Models and Friction Compensation", *Journal of European Control*, Vol. 4(3), 1998.
 - [77] Polycarpou, A. and A. Soom, "Transitions between sticking and slipping," In R. A. Ibrahim and A. Soom (Eds), *Friction-Induced Vibration, Chatter, Squeal, and Chaos, Proceedings ASME Winter Annual Meeting, Anaheim, DE-Vol. 49*, ASME, NY, 1992, pp. 139-148.
 - [78] Rabinowitz, E., "The nature of the static and kinetic coefficients of friction," *Journal of Applied Physics*, Vol. 22(11), 1951, pp. 1373-1379.
 - [79] Rabinowitz, E., "The intrinsic variables affecting the stick-slip process," *Proceedings Physical Society of London*, Vol. 71(4), 1958, pp. 668-675.
 - [80] Rankin, J. S., "The elastic range of friction," *Philos. Mag.*, Vol. 2(10), 1926, pp. 806-817.
 - [81] Reynolds, O., "On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower' s experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil," *Phil. Trans. Royal Soc.*, 1886, 177, 157-234.
 - [82] Rice, J. R. and A. L. Ruina, "Stability of steady frictional slipping," *J. of Applied Mechanics*, 1983, Vol. 50, pp. 343-349.
 - [83] Richardson, R. S. H. and H. Nolle, "Surface friction under time-dependent loads," *Wear*, Vol. 37(1), 1976, pp. 87-101.
 - [84] Ruina, A., "Friction laws and instabilities: a quasistatic analysis of some dry frictional behavior," Ph.D. Dissertation, Division of Engineering, Brown University, 1980.
-

-
- [85] Sampson, J. B., F. Morgan, D. W. Reed and M. Muskat, "Friction behavior during the slip portion of the stick-slip process," *J. Applied Physics*, Vol. 14(12), 1943, pp. 689-700.
 - [86] Schafer, U. and G. Brandenburg, "Model reference position control of an elastic two-mass system with backlash and Coulomb friction using different types of observers," *Power Electronics and Motion Control*, PEMC, Budapest, vol. 3, 1990, pp. 797-801.
 - [87] Schafer, U. and G. Brandenburg, "Model reference position control of an elastic two-mass system with compensation of Coulomb friction," *Proceedings 1993 American Control Conference*, AACC, San Francisco, CA, 1993, pp. 1937-1941.
 - [88] Shen, C. N., "Synthesis of high order nonlinear control systems with ramp input," *IRE Trans. On Automatic Control*, AC-7(2), 1962, pp. 22-37.
 - [89] Shen, C. N. and H. Wang, "Nonlinear compensation of a second- and third-order system with dry friction," *IEEE Trans. On Applications and Industry*, 83(71), 1964, pp. 128-136.
 - [90] SKF, General Catalogue, 1970.
 - [91] Stribeck, R., "Die Wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager- the key qualities of sliding and roller bearings," *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 1902, 46(38), pp. 1342-1348, 46(39), pp. 1432-1437.
 - [92] Townsend, W. T. and J. K. Salisbury, "The effect of Coulomb friction and stiction on force control," *Proceedings 1987 Inter. Conf. On Robotics and Automation*, IEEE, Raleigh, 1987, pp. 883-889.
 - [93] Wallenborg, A. and K. J. Astrom, "Limit cycle oscillations in high performance robot drives," *Proceedings IEE International Conference CONTROL 88*, IEE, 1988, pp. 444-449.

Παράρτημα Α

Σχεδιασμός τροχιάς παρακολούθησης

Η τροχιά παρακολούθησης, δηλαδή η συνάρτηση μεταβολής της εισόδου του συστήματος ελέγχου θέσης ως προς τον χρόνο, συγκροτείται από δύο τμήματα, όπως φαίνεται στο Σχ. 6-22. Τα δύο αυτά τμήματα αποτελούν τμήματα παραβολής, τα οποία είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $(t_{d,1}, \theta_{d,1})$.

Συγκεκριμένα, η καμπύλη περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\theta_d(t) = \begin{cases} A \cdot t^2, & t \in [0, t_1], \\ \theta_{d,2} - A \cdot (t - t_2)^2, & t \in (t_1, t_2] \\ \theta_{d,2}, & t \in (t_2, \infty) \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

Από την Εξ. (A-1) υπολογίζεται η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της επιθυμητής θέσης, δηλαδή η επιθυμητή ταχύτητα και η επιθυμητή επιτάχυνση, που είναι αντίστοιχα:

$$\dot{\theta}_d = \begin{cases} 2At, & t \in [0, t_1] \\ -2A(t - t_2), & t \in (t_1, t_2] \\ 0, & t \in (t_2, \infty) \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

$$\ddot{\theta}_d = \begin{cases} 2A, & t \in [0, t_1] \\ -2A, & t \in (t_1, t_2] \\ 0, & t \in (t_2, \infty) \end{cases} \quad (\text{A-3})$$

Απαραίτητη προϋπόθεση αποτελεί η καμπύλη να είναι συνεχής, που σημαίνει ότι πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_d}{dt} \Big|_{t=t_1^-} = \frac{d\theta_d}{dt} \Big|_{t=t_1^+} \\ \frac{d\theta_d}{dt} \Big|_{t=t_2^-} = \frac{d\theta_d}{dt} \Big|_{t=t_2^+} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2At_1 = -2A(t_1 - t_2) \\ -2A(t_2 - t_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t_1 = \frac{t_2}{2} \quad (\text{A-4})$$

$$\text{και:} \quad \begin{cases} \theta_d(t = t_1^-) = \theta_d(t = t_1^+) \\ \theta_d(t = t_2^-) = \theta_d(t = t_2^+) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} At_1^2 = \theta_{d,2} - A(t_1 - t_2)^2 \\ \theta_{d,2} = \theta_{d,2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta_{d,1} = \frac{\theta_{d,2}}{2} \quad (\text{A-5})$$

Με βάσει τις Εξ. (A-4) και (A-5) προκύπτει ότι καθορίζοντας το σημείο $(t_2, \theta_{d,2})$ ή το σημείο $(t_1, \theta_{d,1})$ καθορίζεται ολόκληρη η καμπύλη.

Παράρτημα Β

Καθορισμός κερδών PD κατευθυντή

Β.1 Αντιστάθμιση τριβής και έλεγχος με πηγή ρεύματος

Η επιλογή των κερδών του PD κατευθυντή, στην περίπτωση αντιστάθμισης τριβής και ελέγχου με πηγή ρεύματος, μπορεί να γίνει θεωρώντας ότι η κίνηση του σώματος γίνεται πάντα προς μία κατεύθυνση. Τότε, η τριβή ολίσθησης ή η τριβή Coulomb, δηλαδή το μη γραμμικό τμήμα της τριβής, που εξαρτάται από το πρόσημο της ταχύτητας, μπορεί να θεωρηθεί ως διαταραχή στο σύστημα. Σ' αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος υπολογίζεται από το δομικό διάγραμμα του Σχ. 6-16, εφ' όσον τεθεί:

$$\begin{aligned}T_f(\omega) &= b \cdot \omega \\T'_f(\omega) &= b' \cdot \omega\end{aligned}\tag{B-1}$$

Συγκεκριμένα, το σύστημα έχει δύο συναρτήσεις μεταφοράς λόγω των δύο εισόδων του (επιθυμητή θέση, τριβή ολίσθησης) και είναι ενός βαθμού ελευθερίας, βλ. Παρ. 6.2.1. Μάλιστα, αν η επίδραση του φίλτρου G_{filter} θεωρηθεί αμελητέα, η μία εκ των δύο συναρτήσεων μεταφοράς του συστήματος είναι η εξής:

$$G_{linear}(s) = \frac{K_T K_{amp} K_p}{J_{ολ} s^2 + (\Delta b + K_T K_{amp} K_d) s + K_T K_{amp} K_p}\tag{B-2}$$

Από την Εξ. (B-2) προκύπτει ότι η απόσβεση του συστήματος και η ιδιοσυχνότητά του είναι:

$$\zeta = \frac{\Delta b + K_T K_{amp} K_d}{2J_{ολ} \omega_n}\tag{B-3}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_T K_{amp} K_p}{J_{ολ}}}\tag{B-4}$$

αντίστοιχα.

Η επιλογή των δύο κερδών του PD κατευθυντή γίνεται θέτοντας:

$$\zeta \cong 1\tag{B-5}$$

οπότε από τις Εξ. (B-3), (B-4), προκύπτει:

$$K_p = \frac{1}{K_T K_{amp}} \cdot \frac{(\Delta b + K_T K_{amp} K_d)^2}{4J_{ολ}}\tag{B-6}$$

Αν υποθεθεί ότι η εκτίμηση του συντελεστή ιξώδους τριβής είναι αρκετά ακριβής, τότε μπορεί να θεωρηθεί ότι $\Delta b \cong 0$, οπότε η Εξ. (B-6) γράφεται:

$$K_p = \frac{K_T K_{amp}}{4J_{ολ}} \cdot K_d^2 \quad (B-7)$$

όπου οι μονάδες μέτρησης των μεγεθών είναι:

$$\begin{aligned} K_p &\rightarrow Volt / rad \\ K_d &\rightarrow Volt / rad / sec \\ K_{amp} &\rightarrow Amp / Volt \\ K_T &\rightarrow Nm / Amp \\ J_{ολ} &\rightarrow Kg \cdot m^2 \end{aligned} \quad (B-8)$$

B.2 "Model based" έλεγχος με αντιστάθμιση τριβής και έλεγχο με πηγή ρεύματος

Δεδομένου ότι η δομή του συστήματος είναι η ίδια με εκείνη που περιγράφηκε στο Παράρτημα Β.1, και αν υποθεθεί ότι η πειραματικά προσδιορισθείσα ροπή αδράνειας του συστήματος προσεγγίζει με ικανοποιητική ακρίβεια την πραγματική ροπή αδράνειας, τότε το σύστημα θα διέπεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$J_{ολ} \ddot{\theta} + \Delta b \dot{\theta} = J_{ολ} \left[\ddot{\theta}_d + K_T K_{amp} K_d (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + K_T K_{amp} K_p (\theta_d - \theta) \right] \quad (B-9)$$

Αν, επιπλέον, υποθεθεί ότι η διαφορά, Δb , του πειραματικά προσδιορισθέντος συντελεστή ιξώδους τριβής από την πραγματική του τιμή είναι αμελητέα, τότε η Εξ. (B-9) ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{aligned} J_{ολ} \left[(\ddot{\theta}_d - \ddot{\theta}) + K_T K_{amp} K_d (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + K_T K_{amp} K_p (\theta_d - \theta) \right] &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow J_{ολ} \left[\ddot{\theta} + K_T K_{amp} K_d \dot{\theta} + K_T K_{amp} K_p \theta \right] &= 0 \end{aligned} \quad (B-10)$$

Από την Εξ. (B-10) προκύπτει ότι η απόσβεση του συστήματος και η ιδιοσυχνότητά του είναι:

$$\zeta = \frac{K_T K_{amp} K_d}{2\omega_n} \quad (B-11)$$

$$\omega_n = \sqrt{K_T K_{amp} K_p} \quad (B-12)$$

αντίστοιχα.

Η επιλογή των δύο κερδών του PD κατευθυντή γίνεται θέτοντας:

$$\zeta \cong 1 \quad (B-13)$$

οπότε από τις Εξ. (B-3), (B-4), προκύπτει:

$$K_p = \frac{K_T K_{amp}}{4} \cdot K_d^2 \quad (B-14)$$

όπου οι μονάδες μέτρησης των μεγεθών είναι:

$$\begin{aligned} K_p &\rightarrow Volt / (Kg \cdot m^2 \cdot rad) \\ K_d &\rightarrow Volt / (Kg \cdot m^2 \cdot rad) / sec \\ K_{amp} &\rightarrow Amp / Volt \\ K_T &\rightarrow Nm / Amp \\ J_{o\lambda} &\rightarrow Kg \cdot m^2 \end{aligned} \quad (B-15)$$

Παράρτημα Γ

Πρόγραμμα PID κατευθυντή με αντιστάθμιση τριβής (κλασσικό μοντέλο) σε περιβάλλον πραγματικού χρόνου (QNX)

```
/* This is a QNX4 application for isa bus communications to a Galil motion controller */
```

```
/* This programme illustrates a pid controller with friction compensation (coulomb friction model) */
```

```
#include "dmcqnx.h"
#include <sys/types.h>
#include <unistd.h>
#include <signal.h>
#include <errno.h>
#include <sys/kernel.h>
#include <time.h>
```

```
timer_t      tid;          /* Timer identifier */
struct itimerspec timer;   /* Timer specification */
struct sigevent event;     /* Event specification */
```

```
void PrintError(long rc);
void alarm_handler(int sig_no)
{
}
```

```
int main(int argc, char* argv[])
{
    int      n = 0;
    int      i;
    int      j;
    int      k;
    int      loop = 999;          /* Total number of cycles */
    int      loopstep = 1;        /* Step of storing data */
    long     rc = 0;              /* Return code */
    long     velocity;            /* Velocity variable */
    int      flnMotion = FALSE;   /* Motion complete flag */
    char     buffer[256] = "";    /* Response from controller */
    char     uploadfile[]="compcoul.dmc"; /* Data file */
    FILE     *errfile;            /* File for storing error */
    FILE     *velfile;            /* File for storing velocity */
    FILE     *timefile;           /* File for storing time */
    FILE     *intfile;            /* File for storing integral */
```

```

char    timefname[81];
char    errfname[81];
char    velfname[81];
char    intfname[81];

pid_t    proxy;
USHORT  usStatus;
HANDLEDMC    hdmc = -1;    /* Handle to controller */
CONTROLLERINFO controllerinfo; /* Controller information structure */

static void alarm_handler(int sig_no);
signal(SIGALRM,alarm_handler); /* Define the signal-handler so that the
                                operating system knows which function to
                                call when the timer expires */

event.sigev_signo = SIGALRM;    /* Set the event's signal number */

tid = timer_create(CLOCK_REALTIME,&event);    /* Create a new timer.The
                                              first argument specifies the type of
                                              event we want */

timer.it_value.tv_sec = 0L;
timer.it_value.tv_nsec = 200000000L;    /* =20msec=0.020sec */
timer.it_interval.tv_sec = 0L;
timer.it_interval.tv_nsec = 0L;

argc = argc;
argv = argv;

printf("Simple isa bus communications example for Galil Motion
Controllers\n\n");

/* In order to receive interrupt messages */
proxy = qnx_proxy_attach(0, 0, 0, 0);

memset(&controllerinfo, '\0', sizeof(controllerinfo));

controllerinfo.cbSize = sizeof(controllerinfo);
controllerinfo.usModelID = MODEL_1700;
controllerinfo.fControllerType = ControllerTypeISABus;
controllerinfo.ulTimeout = 1000;
controllerinfo.pid = proxy;
controllerinfo.hardwareinfo.businfo.usAddress = 824;
controllerinfo.hardwareinfo.businfo.usInterrupt = 11;

DMCInitLibrary();

/* Open the connection */
rc = DMCOpen(&controllerinfo, &hdmc);
if (rc)

```

```
{
    PrintError(rc);
    return rc;
}

/* Query the state of the inputs */
rc = DMCCCommand(hdmc, "TI", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);
else
{
    int temp;
    temp = atoi(buffer);
    printf("The value of the inputs is %d\n", temp);
}

/* Set the controller gains */
rc = DMCCCommand(hdmc, "KP0;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

rc = DMCCCommand(hdmc, "KD0;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

rc = DMCCCommand(hdmc, "KI0;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

/* Set the controller offset */
rc = DMCCCommand(hdmc, "OF0;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

/* Define position */
rc = DMCCCommand(hdmc, "DPX=0;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

/* Servo here */
rc = DMCCCommand(hdmc, "SH;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

/* Download File with the appropriate data */
rc = DMCDownloadFile(hdmc, uploadfile, NULL);
if (rc)
    PrintError(rc);

/* Execute file */
```

```

rc = DMCCCommand(hdmc, "XQ", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

/* Define the arrays of position, velocity, torque and error integral */
rc = DMCCCommand(hdmc, "DM ERRX[1000];DM VELX[1000];DM
TIM[1000];DM INTE[1000];", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

/* Define two counters */
rc = DMCCCommand(hdmc, "COUNTER=0;N=0;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

/* Define the first value of time */
rc = DMCCCommand(hdmc, "TIMER0=TIME;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

/* Define the first value of error */
rc = DMCCCommand(hdmc, "ERRX[0]=ERR0;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

/* Define the first value of time */
rc = DMCCCommand(hdmc, "TIM[0]=(TIME-TIMER0);", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

/* Define the first value of error integral */
rc = DMCCCommand(hdmc, "INTE[0]=0;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

j=0; /*counter*/

do
{
    timer_settime(tid,0,&timer,NULL);

    n=n+1;

    if (n == loopstep)
    {
        rc = DMCCCommand(hdmc, "COUNTER=COUNTER+1;", buffer, sizeof(buffer));
        if (rc)
            PrintError(rc);
    }
}

```

```

/* Define the position variable */
rc = DMCCCommand(hdmc, "POS=_TPX;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

/* Define the error variable */
rc = DMCCCommand(hdmc, "ERR=(POS1-POS);", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

/*-----Coulomb Friction-----*/
rc = DMCCCommand(hdmc, "POS2=@INT[POS/20];", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

rc = DMCCCommand(hdmc, "POS3=POS2+1;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

/* Define the coulomb friction as a function of current position */
rc = DMCCCommand(hdmc, "FC=KFC*((F[POS2]+F[POS3])/2);", buffer,
sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

/* Define the velocity variable */
rc = DMCCCommand(hdmc, "VEL=_TVX;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

/* Storing current velocity */
rc = DMCCCommand(hdmc, "VELX[COUNTER]=VEL;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

rc = DMCCCommand(hdmc, "VEL=;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);
else
{
    velocity = atol(buffer);
    if (velocity > 20)
    {
        rc = DMCCCommand(hdmc, "FCS=FC;", buffer, sizeof(buffer));
        if (rc)
            PrintError(rc);
    }

    else if (velocity < -20)
    {

```

```

        rc = DMCCCommand(hdmc, "FCS=-FC;", buffer, sizeof(buffer));
        if (rc)
            PrintError(rc);
    }

    else
    {
        rc = DMCCCommand(hdmc, "FCS=0.001;", buffer, sizeof(buffer));
        if (rc)
            PrintError(rc);
    }
}

/*-----*/

/*-----Viscous Friction-----*/

    rc = DMCCCommand(hdmc, "APOS=KAPO*(0.001*((AP[POS2]+AP[POS3])/2));",
buffer, sizeof(buffer));
    if (rc)
        PrintError(rc);
/*-----*/

/* Define the time variable */
rc = DMCCCommand(hdmc, "TIMER=(TIME-TIMER0);", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

rc = DMCCCommand(hdmc, "ERRX[COUNTER]=ERR;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

rc = DMCCCommand(hdmc, "TIM[COUNTER]=TIMER;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

/* Current change in position error */
rc = DMCCCommand(hdmc, "ERRPART=(ERRX[COUNTER]+ERRX[COUNTER-
1]);", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

/* Current change in time */
rc = DMCCCommand(hdmc, "TIMPART=(0.001*(TIM[COUNTER]-
TIM[COUNTER-1]));", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

/* Integral calculation */

```

```

    rc = DMCCCommand(hdmc, "INTE[COUNTER]=INTE[COUNTER-1]+(0.5*(ERRPART*TIMPART));", buffer, sizeof(buffer));
    if (rc)
        PrintError(rc);

    /* Store integral */
    rc = DMCCCommand(hdmc, "INTEGR=INTE[COUNTER];", buffer, sizeof(buffer));
    if (rc)
        PrintError(rc);

    /* Define the torque variable */
    rc = DMCCCommand(hdmc, "TOR=(FCS+(APOS*VEL)+(ERR*G[0])-(VEL*G[1])+((INTEGR*G[2])*G[0]));", buffer, sizeof(buffer));
    if (rc)
        PrintError(rc);

    /* Set the offset */
    rc = DMCCCommand(hdmc, "OF TOR;", buffer, sizeof(buffer));
    if (rc)
        PrintError(rc);
    n=0;
}

pause();      /*This blocks the program until a signal arrives*/

} while (++j < loop);

/* Query the X axis position error */
rc = DMCCCommand(hdmc, "ERR=", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);
else
{
    long temp;
    temp = atol(buffer);
    printf("The value of the X axis position error is %ld\n", temp);
}

/* Turn the motor off */
rc = DMCCCommand(hdmc, "MO;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

/* Record data */
printf("Write the name of the file you want to store error array into:");
gets(errfname);

```

```
if ( (errfile = fopen(errfname, "w")) == NULL)
{
    printf("fopen failed.\n");
    exit(0);
}

printf("Write the name of the file you want to store velocity array into:");
gets(velfname);

if ( (velfile = fopen(velfname, "w")) == NULL)
{
    printf("fopen failed.\n");
    exit(0);
}

printf("Write the name of the file you want to store time array into:");
gets(timefname);

if ( (timefile = fopen(timefname, "w")) == NULL)
{
    printf("fopen failed.\n");
    exit(0);
}

printf("Write the name of the file you want to store error integral into:");
gets(intfname);

if ( (intfile = fopen(intfname, "w")) == NULL)
{
    printf("fopen failed.\n");
    exit(0);
}

k=0; /* counter */

do
{
    /* Storing the error array */
    rc = DMCCCommand(hdmc, "ERRX[N]=;", buffer, sizeof(buffer));
    if (rc)
        PrintError(rc);
    else
    {
        long temp;
        temp = atol(buffer);
        fprintf(errfile, "%ld\n", temp);
    }
}
```



```
/* Storing the torque array */
rc = DMCCCommand(hdmc, "VELX[N]=;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);
else
{
    long temp;
    temp = atol(buffer);
    fprintf(velfile, "%ld\n", temp);
}

/* Storing the time array */
rc = DMCCCommand(hdmc, "TIM[N]=;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);
else
{
    long temp;
    temp = atol(buffer);
    fprintf(timefile, "%ld\n", temp);
}

/* Storing the integral array */
rc = DMCCCommand(hdmc, "INTE[N]=;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);
else
{
    long temp;
    temp = atol(buffer);
    fprintf(intfile, "%ld\n", temp);
}

/* Increase the value of the counter */
rc = DMCCCommand(hdmc, "N=N+1;", buffer, sizeof(buffer));
if (rc)
    PrintError(rc);

} while (++k < loop);

fflush(stdout);

for (i = 0; i < 16; i++)
{
    char command[16];

    sprintf(command, "UI%d;", i);
    rc = DMCCCommand(hdmc, command, buffer, sizeof(buffer));
```

```
    if (rc)
        PrintError(rc);

    /* This function will block on waiting for the interrupt message
       to be generated - this should be in a separate thread */
    Receive(proxy, 0, 0);

    rc = DMCGGetInterruptStatus(hdmc, &usStatus);
    if (rc)
    {
        PrintError(rc);
        return rc;
    }
    else
        printf("The interrupt status for UI%d is %u\n", i, usStatus);
}

/* Close the connection */
rc = DMCClose(hdmc);
if (rc)
{
    PrintError(rc);
    return rc;
}

printf("\nDone\n");

return 0L;
}

void PrintError(long rc)
{
    printf("An error has occurred. Return code = %ld\n", rc);
    fflush(stdout);
}
```